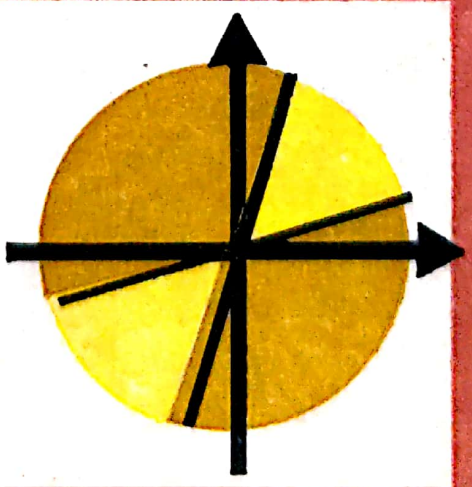
CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ SI FIZICĂ

SERIE

FĂNICĂ TURTOIU

ECUAȚII ȘI INECUAȚII TRIGONOMETRICE



Scanned with OKEN Scanner

FĂNICĂ TURTOIU

ECUAŢII ŞI INECUAŢII TRIGONOMETRICE

Seria
Culegeri de probleme
de matematică și fizică

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI — 1977

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea abordează un capitol al trigonometriei, care prezintă un interes deosebit atît pentru elevi, cît și pentru cadre didactice, și pentru cei care lucrează în industrie.

Prima parte a lucrării este consacrată rezolvării unor tipuri de ecuații și inecuații trigonometrice, iar partea a doua se ocupă de discuția ecuațiilor cu parametri.

Fiecare parte conține expunerea metodelor de rezolvare, urmată de probleme rezolvate, apoi se dau enunțurile exercițiilor propuse spre rezolvare, însoțite de indicații și răspunsuri.

Se adresează tuturor elevilor de liceu, candidaților la examenele de bacalaureat și de admitere în institute tehnice, universități, școli tehnice postliceale, cadrelor didactice și studenților din institute pedagogice și poate fi utilă maiștrilor, tehnicienilor și muncitorilor de înaltă calificare din industrie.

PREFAȚĂ

Lucrarea de față se adresează în principal elevilor din liceele de toate categoriile și din școlile tehnice, putînd fi utilă și maiștrilor, tehnicienilor și muncitorilor de înaltă calificare din industrie, precum și cadrelor didactice din învățămîntul mediu, și are ca scop să pună la dispoziția acestora o sistematizare ceva mai completă decît aceea din manualele școlare a unui important capitol din trigonometrie și anume acela privitor la rezolvarea și discuția ecuațiilor trigonometrice. Tratarea mai dezvoltată a acestui capitol a fost determinată de faptul că problemele din această categorie mai constituie încă pentru elevii de liceu o dificultate, mai ales că în lucrările de specialitate (manuale, culegeri etc.) tratarea acestora este limitată doar la două sau trei tipuri de ecuații.

În materialul prezentat am căutat să extind pe cît a fost posibil gruparea ecuațiilor trigonometrice pe mai multe tipuri, sintetizînd teoria respectivă pe exemple tratate complet.

Apreciez ca posibilă și o altă categorisire, dar din experiența de la catedră cu elevii a rezultat că prezentarea ecuațiilor trigonometrice, așa cum este dată în lucrarea de față, poate fi însușită cu destulă ușurință de toți elevii din anii II—IV, cu mențiunea doar că rezolvarea și discuția unora dintre probleme necesită și cunoștințe din anii III—IV de liceu (reprezentarea grafică a funcțiilor, teorema lui Rolle etc.).

Materialul prezentat, circa 230 de exerciții, foarte variat și cu selecții din numeroase lucrări de specialitate, oferă elevilor multiple căi de abordare a rezolvării și discuției oricăror tipuri de ecuații trigonometrice, precum și a inecuațiilor și sistemelor trigonometrice. Pentru aceasta este însă necesară cunoașterea temeinică a formulelor trigonometrice, a calculului algebric și a analizei din anii III—IV.

Menționez că, în ceea ce privește completarea și finisarea materialului, am ținut seama de prețioasele sugestii date de tov. conf. dr. Gh. D. Simionescu, care a efectuat controlul științific al lucrării, precum și celor date de redacția de matematică a Editurii tehnice, cărora le aduc mulțumiri.

Soluțiile adoptate pentru fiecare exercițiu în parte nu sînt limitative și aș fi bucuros pentru unele sugestii ce ar veni de la cititori și de care, bineînțeles, s-ar putea ține seama la o eventuală reeditare a lucrării.

AUTORUL

București, februarie 1977

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Partea întîi

Rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor trigonometrice 5

1. *Ecuații trigonometrice cu funcții circulare directe* 5

1.1. Forma de prezentare și metode generale de rezolvare ale ecuațiilor trigonometrice 5
1.2. Exemple de ecuații trigonometrice rezolvate complet 8

2. *Ecuații trigonometrice cu funcții trigonometrice inverse* 22
2.1. Forma de prezentare și metode generale de rezolvare 22
2.2. Exemple de ecuații cu arcfuncții rezolvate complet 25

3. *Aplicații ale ecuațiilor trigonometrice la rezolvarea inecuațiilor și sistemelor trigonometrice* 27
3.1. Inecuații trigonometrice 27
3.2. Sisteme de ecuații trigonometrice 34

4. *Exerciții propuse spre rezolvare* 39

Partea a doua

Discuția ecuațiilor trigonometrice 81

5. *Discuția ecuațiilor trigonometrice* 81

5.1. Prezentare 81
5.2. Exemple de discuții de ecuații trigonometrice cu un singur parametru, rezolvate complet 85

6. *Exerciții propuse spre rezolvare* 96

Anexa 1 116
Anexa 2 118

Bibliografie 120

Scanned with OKEN Scanner

Partea întîi

REZOLVAREA ECUAȚIILOR ȘI INECUAȚIILOR TRIGONOMETRICE

1. ECUAȚII TRIGONOMETRICE CU FUNCȚII CIRCULARE DIRECTE

1.1. Forma de prezentare şi metode generale de rezolvare ale ecuaţiilor trigonometrice

O ecuaţie se numeşte trigonometrică dacă conţine una sau mai multe necunoscute numai prin intermediul unor funcţii trigonometrice.

Forma generală a unei ecuaţii trigonometrice conţinînd o singură necunoscută este

$$F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = 0, \tag{1.1}$$

în care cel puţin una din funcţiile trigonometrice este nenulă.

Rezolvarea ecuaţiei de forma (1.1) constă în a aduce membrul întîi, cu ajutorul operaţiilor trigonometrice fundamentale cunoscute, la forma

$$f_1(\cos x) \cdot f_2(\sin x) \cdot f_3(\operatorname{tg} x) \cdot f_4(\operatorname{ctg} x) \ldots = 0, \tag{1.2}$$

produsul din membrul întîi putînd conţine chiar un singur factor. Din (1.2) rezultă imediat ecuaţiile :

$$f_1(\cos x) = 0,\ f_2(\sin x) = 0,\ f_3(\operatorname{tg} x) = 0,\ f_4(\operatorname{ctg} x) = 0, \tag{1.3}$$

fiecare putînd fi de orice grad în raport cu funcţia trigonometrică respectivă. Rezolvarea ecuaţiilor (1.3) conduce la ecuaţii elementare de forma

$$\sin x = a,\ \cos x = b,\ \operatorname{tg} x = c,\ \operatorname{ctg} x = d, \tag{1.4}$$

iar pentru ca ecuaţiile (1.4) să aibă soluţii este necesar ca $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$ şi $c, d \in R$.

Scanned with OKEN Scanner

Problema dificilă constă însă în aceea că ecuaţiile de forma (1.1) în multe cazuri nu pot fi aduse la forma (1.2). În această situaţie sînt recomandabile următoarele metode :

1° Dacă în ecuaţia (1.1) o funcţie trigonometrică este la o putere impară, iar celelalte sînt la puteri pare, atunci se ia ca necunoscută funcţia de putere imapară, făcîndu-se transformările corespunzătoare ale funcţiilor de puteri pare cu ajutorul formulelor ce se deduc din relaţia fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ecuaţia (1.1) luînd una din formele (1.3) sau chiar (1.4).

2° Dacă transformarea 1° nu este posibilă şi gradele funcţiilor trigonometrice din (1.1) nu sînt mari (de regulă $\leqslant 2$), atunci cu ajutorul formulelor universale

$$\left.\begin{aligned} &\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2} \\ &\operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}, \quad \text{unde } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \text{cu } \frac{x}{2} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

ecuaţia (1.1) se transformă într-o ecuaţie algebrică de forma

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{1.6}$$

rezolvarea acesteia făcîndu-se după regulile cunoscute din algebră. Inconvenientul acestei metode este că ecuaţia algebrică (1.6) care se obţine este de grad mare, aşa încît metoda se aplică atunci cînd o altă posibilitate mai rapidă nu există, asigurîndu-ne în această situaţie că ecuaţia dată nu are soluţii de forma $x = (2k+1)\pi$.

3° Dacă nici una din metodele de la 1° şi 2° nu este aplicabilă, atunci se vor folosi diferite procedee particulare ce necesită unele artificii de calcul şi care se vor arăta în detaliu în cele ce urmează.

Orice metodă de rezolvare se foloseşte, în principal se urmăreşte ca ecuaţiile de forma (1.1) să fie transformate în ecuaţii echivalente de forma (1.4), după care se trece la precizarea arcelor (unghiurilor) care răspund la problemă, adică la stabilirea soluţiei generale.

Avînd în vedere că fiecăreia din ecuaţiile de forma (1.4) corespund pentru x cîte două valori obţinute prin parcurgerea o singură dată

Scanned with OKEN Scanner

a cercului trigonometric, se convine să se ia următoarele soluţii generale pentru ecuaţiile respective :

$$\left.\begin{aligned}
&\sin x = a;\ x = (-1)^k \arcsin a + k\pi \text{ pentru } a \in [0, 1] \\
&\qquad \text{şi } x = (-1)^{k+1} \arcsin |a| + k\pi \text{ pentru } a \in (-1, 0) \\
&\cos x = b;\ x = \pm \arccos b + 2k\pi, \text{ pentru } b \in [0, 1] \\
&\qquad \text{şi } x = \pm \arccos |b| + (2k+1)\pi, \text{pentru } b \in (-1, 0) \\
&\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x = c,\ x = \operatorname{arctg} c + k\pi \\ \operatorname{ctg} x = d,\ x = \operatorname{arcctg} d + k\pi \end{aligned}\right\} c, d \in R,\ k \in Z
\end{aligned}\right\} \quad (1.7)$$

(a se vedea cazurile particulare din anexa 2).

De observat că fiecare soluţie generală din (1.7) constituie de fapt un şir sau două şiruri de valori pentru argumentul x, şi că oricare din şirurile respective formează o progresie aritmetică, cu raţia $\pm k\pi$ şi respectiv $\pm 2k\pi$. Dacă din ecuaţia (1.1) rezultă în final mai multe ecuaţii de forma (1.4), soluţiile date în (1.7) se pot reuni, sau rămîn aşa cum vor rezulta din calcule.

În cele ce urmează vom folosi denumirea de soluţie generală, sau pur şi simplu soluţie, a fiecărei ecuaţii de forma (1.4), orice şir de forma (1.7). Rezultă că o ecuaţie trigonometrică poate avea una sau mai multe soluţii generale de forma (1.7).

4° În multe cazuri ecuaţiile trigonometrice se dau şi sub forma

$$F_1(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x) = F_2(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x), \quad (1.8)$$

cu menţiunea că cel puţin una din funcţiile F_1 sau F_2 trebuie să depindă minimum de o funcţie trigonometrică. Dacă una din funcţiile F_1 sau F_2 nu are sens pentru $x = \alpha$, dar

$$\lim_{x \to \alpha} (F_1 - F_2) = 0,$$

atunci, numărul α constituie o *rădăcină singulară* a ecuaţiei (1.8), soluţia generală corespunzătoare rezultînd din ecuaţia elementară care face nedefinită funcţia trigonometrică respectivă, cînd $x = \alpha$.

În cazul în care limita de mai sus este diferită de zero, nu există sau nu are sens, atunci soluţiile rezultate din $x = \alpha$ se exclud de la început. De regulă, în manualele de trigonometrie pentru licee, valorile α pentru care una din funcţiile F_1 sau F_2 nu are sens se înlătură de la început, deoarece problemele de limită se tratează în cadrul analizei matematice. În exemplele ce se prezintă mai de-

Scanned with OKEN Scanner

parte se vor analiza şi aceste cazuri, adică se vor determina şi soluţiile singulare ale ecuaţiilor trigonometricc.

1.2. Exemple de ecuaţii trigonometrice rezolvate complet

1.2.1. *Ecuaţii la care se aplică metoda* 1°

1.1. Să se revolve ecuaţia

$$\sqrt{2}\cos x + 2\sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 3, \qquad \text{cu } x \neq k\pi.$$

R. Luîndu-se ca necunoscută $\cos x$, avem

$$\sqrt{2}\cos x + 2(1 - \cos^2 x) + \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = 3. \tag{1}$$

Pentru uşurinţa calculului, se face înlocuirea $\cos x = t$ şi după efectuarea calculelor ecuaţia (1) devine

$$2t^4 - \sqrt{2}t^3 + \sqrt{2}t - 1 = 0$$

sau

$$\sqrt{2}t^3(\sqrt{2}t - 1) + (\sqrt{2}t - 1) = 0, \tag{2}$$

rădăcinile reale ale ecuaţiei (2) fiind $t_1 = \sqrt{2}/2$ şi $t_2 = -1/\sqrt[6]{2}$.

Ţinînd seamă de (1.7), rezultă soluţiile generale

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{4} + 2k_1\pi \text{ şi } x_2 = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt[6]{2}} + (2k_2 + 1)\pi,\ k_1, k_2 \in Z.$$

De observat că s-au obţinut patru şiruri de soluţii distincte, care corespund problemei. Aşa cum s-a arătat mai înainte şirurile respective se pot reuni, în cazul în care prin această operaţie soluţia generală a problemei se poate scrie sub o formă mai condensată, decît soluţiile x_1 şi x_2, ceea ce nu este cazul în acest exemplu.

Se înţelege, că dacă se fac precizările respective, atunci se scriu soluţiile generale rezultate din ecuaţiile de forma (1.4), reunirea acestora sub forma (1.7) nu mai este necesară, deşi în unele lucrări de specialitate (culegeri de probleme), soluţia concentrată se scrie şi sub această ultimă formă, adică $x \in \{x_1\} \cup \{x_2\}$, formă care în situaţia actuală, aşa cum am precizat mai înainte, nu oferă nici un avantaj.

Scanned with OKEN Scanner

Nu aceeaşi situaţie este în cazul următor.

1.2. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin^2 x - \cos^2 x - \cos x = 0.$$

R. Soluţiile sînt date de ecuaţiile elementare $\cos x = \frac{1}{2}$ şi $\cos x = -1$ cu $x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k_1\pi$ şi $x_2 = (2k_2 + 1)\pi$. În acest caz, cele trei progresii date de x_1 şi x_2 se pot reuni, observîndu-se că

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \text{ şi } x = \pi + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

În consecinţă soluţia generală se poate scrie astfel:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k' = \frac{2k' - 1}{3}\pi, \qquad k' \in Z.$$

1.2.2. *Ecuaţii ce se rezolvă prin metoda 2°*

1.3. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin x - 13\cos x + 3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 4\operatorname{ctg} x = 4, \text{ cu } x \neq k\pi,\ k \in Z.$$

R. Înlocuind toate funcţiile circulare prin $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, ecuaţia devin

$$\frac{2t}{1+t^2} + 2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3t + 4\frac{1-t^2}{2t} = 4, \tag{1}$$

iar după efectuarea calculelor

$$t^4 + 9t^3 + 5t^2 - 17t + 2 = 0, \tag{2}$$

rădăcinile întregi ale ecuaţiei (2) fiind $t_1 = 1$, $t_2 = -2$, de unde rezultă ecuaţiile elementare $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, cu soluţia $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$ şi $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -2$, cu soluţia $x_2 = 2\operatorname{arctg}(-2) + 2k_2\pi$, $k_1, k_2 \in Z$.

1.4. Să se rezolve ecuaţia

$$2\sin x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Se observă că ecuația este nedefinită pentru arcele de forma $x' = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ și $x'' = (2k+1)\pi$, $k \in Z$. Astfel, soluțiile de forma x' și x'' se exclud.

Ecuația dată se poate rezolva cu ajutorul formulelor (1.5). Ecuația devine în final $t^2(9-t^2)=0$, de unde rezultă $t_{1,2}=0$ cu $x_1 = 2k_1\pi$ și $t_{3,4} = \pm\sqrt{3}$ cu $x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k_3\pi$ și $x_4 = \frac{-2\pi}{3} + 2k_4\pi$, $k_{1,3,4} \in Z$.

De menționat că soluțiile reunite se pot scrie sub forma concentrată $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in Z$.

Altfel. Ecuația respectivă se poate rezolva și direct, astfel:

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos x} + \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = 0 \text{ sau } \frac{2(1-\cos^2 x)}{\cos x} \quad \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = 0,$$

de unde rezultă $\cos x = 1$ cu soluția $x_1 = 2k_1\pi$ și $2(1+\cos x)^2 + \cos x = 0$ sau $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$ cu soluția $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + (2k_2+1)\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

1.2.3. *Ecuații care se rezolvă prin diferite procedee particulare*

Ecuații de forma $a \sin x + b \cos x = c$ (1.9)

O ecuație de tipul (1.9) în care $a, b \neq 0$ se rezolvă astfel:

1) Se introduce unghiul auxiliar $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ și se împart ambii membri ai ecuației prin $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ (semnul + corespunde pentru $a>0$ și semnul − pentru $a<0$), ecuația respectivă devenind $\sin(\varphi + x) = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, adică de forma (1.4). Dar această ecuație are soluție numai dacă $\left|\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$ sau $a^2+b^2 \geqslant c^2$.

2) Se pune $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ cu $x \neq (2k+1)\pi$, *fiind necesar ca mai întîi să se verifice dacă ecuația dată prin enunț nu are soluții de această formă.*

Se examinează deci două cazuri.

1. Cazul în care ecuația (1.9) nu are soluții de forma $x = (2k+1)\pi$. În această situație putem scrie $a\sin(2k+1)\pi + b\cos(2k+1)\pi \neq c$

sau $b + c \neq 0$. Înlocuind $\sin x$ şi $\cos x$ cu tangenta arcului (unghiului) pe jumătate, ecuaţia dată devine

$$a \frac{2t}{1+t^2} + b \frac{1-t^2}{1+t^2} = c$$

sau

$$(b + c)\, t^2 - 2\, at - b + c = 0, \qquad (1.10)$$

o ecuaţie de gradul al doilea, ţinînd seamă, aşa cum am precizat mai înainte, că $b + c \neq 0$. Pentru ca ecuaţia (1.10) să aibă rădăcini reale este necesar ca

$$\Delta = a^2 + b^2 - c^2 \geqslant 0 \text{ sau } a^2 + b^2 \geqslant c^2,$$

condiţie pe care am găsit-o folosind prima metodă.

În cazul în care rădăcinile ecuaţiei (1.10) sînt distincte, avem $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t_1$ cu $x_1 = 2 \operatorname{arctg} t_1 + 2k_1 \pi$ şi $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t_2$ cu $x_2 = 2 \operatorname{arctg} t_2 + 2 k_2 \pi$, $\quad k_{1,\,2} \in Z$.

2. Cazul în care ecuaţia (1.9) are o soluţie de forma $x = (2k+1)\pi$. În această situaţie avem $b + c = 0$, putîndu-se scrie $a \sin x + b(1+\cos x) = 0$ sau $2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2b \cos^2 \frac{x}{2} = 0$, cu $\cos \frac{x}{2} = 0$ şi $\frac{x}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{2}$, adică $x = (2k+1)\pi$ şi cu $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{b}{a}$, cu $x = 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{b}{a}\right) + 2k\pi$, $\quad k \in Z$.

De menţionat că în situaţia în care se presupune că $b + c = 0$ şi că ecuaţia de gradul al doilea (1.10) se reduce la o ecuaţie de gradul întîi, o rădăcină a acestei ecuaţii se poate considera ∞, ceea ce corespunde pentru $x = (2k+1)\pi$. Problema se rezolvă în mod asemănător dacă se înlocuieşte a cu b (sau $\sin x$ prin $\cos x$).

Dacă $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, atunci se presupune că există un arc $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ care verifică ecuaţia $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$. Prin urmare, împărţind ecuaţia (1.9) prin a, obţinem

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a} \text{ sau } \sin x + \operatorname{tg} \alpha \cos x = \frac{c}{a}$$

sau încă

$$\sin(\alpha + x) = \frac{c}{a}\cos\alpha. \tag{1.11}$$

Dar ecuaţia (1.11) are soluţii în cazul în care $\left|\frac{c}{a}\cos\alpha\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{c^2\cos^2\alpha}{a^2} \leqslant 1$, sau încă $\frac{c^2}{a^2} \leqslant \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$, sau $\frac{c^2}{a^2} \leqslant 1 + \frac{b^2}{a^2}$, adică $a^2 + b^2 \geqslant c^2$, relaţie găsită în ambele metode indicate mai înainte. Dacă condiţia $a^2 + b^2 \geqslant c^2$ este îndeplinită, atunci putem scrie $\sin(\alpha + x) = \sin\beta$, de unde rezultă $x = (-1)^k\beta + k\pi - \alpha$.

Analog se procedează dacă ecuaţia (1.9) se împarte cu b; se obţine $\cos(x - \alpha) = \frac{c}{b}\cos\alpha$; punînd condiţia $\left|\frac{c}{b}\cos\alpha\right| \leqslant 1$ şi notînd $\frac{c}{b}\cos\alpha = \cos\beta$, ecuaţia (1.9) devine în final $\cos(x - \alpha) = \cos\beta$, de unde $x = \pm\beta + 2k\pi + \alpha$.

De remarcat că împărţirea ecuaţiei (1.9) la a sau b, după caz, se recomandă în cazul în care $\frac{b}{a}$ sau $\frac{a}{b}$ este valoarea tangentei unui arc cunoscut.

1.5. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1. \tag{1}$$

R. Aplicînd acestei ecuaţii cele de la 1.2.3, cazul 1, în care $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $c = 1$, rezultă $a^2 + b^2 > c^2$ şi că, prin urmare, ecuaţia dată are soluţii.

Se introduce unghiul auxiliar $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$, ceea ce corespunde arcului $\frac{\pi}{6}$, se împarte ecuaţia cu $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$ (s-a luat + în faţa radicalului deoarece $a > 0$) şi ecuaţia devine

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

adică o ecuaţie de forma (1.4) cu soluţia

$$x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi - \frac{\pi}{6},\ k \in Z.$$

Scanned with OKEN Scanner

De menționat că ecuația se mai poate rezolva și prin separarea uneia din funcțiile trigonometrice, ridicarea la pătrat și înlocuirea lui $\sin x$ prin $\cos x$ sau invers. În acest caz, *este nevoie de a se verifica soluțiile aflate, deoarece, de regulă, prin ridicarea la pătrat se introduc soluții străine.* Aplicînd această metodă, ecuația se poate scrie sub forma

$$\cos x = 1 - \sqrt{3}\sin x; \tag{2}$$

ridicînd la pătrat și înlocuind pe $\cos^2 x$ prin $1 - \sin^2 x$, ecuația (2) devine

$$2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0, \tag{3}$$

soluțiile ecuației (3) fiind date de ecuațiile elementare $\sin x = 0$ cu $x_1 = k_1\pi$ și $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cu $x_2 = (-1)^{k_2}\frac{\pi}{3} + k_2\pi$, $k_1, k_2 \in Z$. Dar înlocuind în ecuația (1) pe $x_1 = k_1\pi$, se constată că această soluție nu este acceptabilă decît pentru valori pare ale lui k_1, adică pentru $x_1 = 2k'\pi$, cu $k' \in Z$. La fel, se constată că nici soluția dată de x_2 nu verifică ecuația decît pentru valori impare ale lui k_2, ceea ce duce la concluzia că x_2 este de forma $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi$ găsită anterior.

Aplicînd ecuației (1) cele arătate în 1.2.3, cazul 2, aceasta se transformă în

$$t^2 - \sqrt{3}\,t = 0,$$

unde $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, rezultînd ecuațiile elementare $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$ cu $x_1 = 2k_1\pi$ și $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3}$ cu $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Ecuații de forma $a\operatorname{tg} x + b\operatorname{ctg} x + c = 0.$ (1.12)

Rezolvarea unor astfel de ecuații se face în modul următor. Se observă că, deoarece $x \neq \frac{k\pi}{2}$, putem scrie

$$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = 0. \tag{1.13}$$

Ecuația (1.13) se poate considera ca omogenă și în această situație, prin împărțirea cu $\cos^2 x \neq 0$, se transformă în

$$a\operatorname{tg}^2 x + c\operatorname{tg} x + b = 0, \tag{1.14}$$

adică o ecuație de gradul al doilea în $\operatorname{tg} x$, care se rezolvă după metodele algebrice cunoscute. Dar ecuația (1.14) se mai poate scrie și sub forma

$$a(1 - \cos 2x) + b(1 + \cos 2x) + c\sin 2x = 0,$$

sau încă

$$c\sin 2x + (b - a)\cos 2x + (a + b) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Această ecuație fiind de forma (1.9), se tratează ca atare.

1.6. Să se rezolve ecuația

$$2 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x - 5 = 0, \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in Z.$$

R. Folosind cele arătate mai înainte, ecuația se transformă în

$$2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 5 \sin x \cos x = 0$$

sau

$$2(1 - \cos 2x) + 3(1 + \cos 2x) - 5 \sin 2x = 0$$

sau încă

$$5 \sin 2x - \cos 2x - 5 = 0.$$

Se observă că ecuația (1) are soluții, deoarece $a^2 + b^2 \geqslant c^2$, adică $5^2 + 1^2 > 5^2$. Deci, se poate folosi oricare din metodele arătate la 1.3.3; rezolvarea ecuației se face însă direct. Înlocuindu-se pentru ușurința calculului $\operatorname{tg} x = t$, această ecuație devine

$$2t^2 - 5t + 3 = 0,$$

cu $t_1 = 1$ și deci $\operatorname{tg} x = 1$ cu $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ și $t_2 = \frac{3}{2}$ cu $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$ și $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + k_2\pi$, ambele soluții verificînd ecuația inițială.

Este recomandabil, ca la alegerea metodei de rezolvare a oricărei ecuații trigonometrice să se evite de la început aceea care implică vreo ridicare la pătrat, recurgîndu-se la această metodă numai atunci cînd o altă soluționare a problemei nu poate fi găsită operativ sau necesită calcule dificile.

Ecuații simetrice de forma

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c \tag{1.15}$$

O ecuație de forma (1.15) se numește *simetrică* în raport cu $\sin x$ și $\cos x$. Într-adevăr, dacă $x_1 = x_0$ este o soluție a ecuației respective, atunci și $x_2 = \frac{\pi}{2} - x_0$ este o soluție, deoarece $\sin x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$. Dar x_1 și x_2 sînt simetrice în raport cu $\frac{\pi}{4}$, astfel încît, pentru rezolvarea ecuației (1.15) se face substituția $x = \frac{\pi}{4} + t$, observîndu-se că

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = \frac{\sin t + \cos t}{\sqrt{2}}$$

și

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}}. \tag{1.16}$$

Cu substituţiile (1.16) ecuaţia (1.15) devine

$$\frac{b}{2}(\cos^2 t - \sin^2 t) + a\sqrt{2}\cos t = c, \tag{1.17}$$

sau, notînd $\cos t = y$, aceasta se scrie sub forma

$$b\,y^2 + a\sqrt{2}y - \left(\frac{b}{2} + c\right) = 0. \tag{1.18}$$

Rezultă că şi $-y$ este o rădăcină a ecuaţiei (1.18). Modul de rezolvare rămîne valabil şi în cazul în care în ecuaţia de tip (1.15) se înlocuieşte x cu $-x$.

Ecuaţiile de forma (1.15) se pot rezolva şi prin substituţiile

$$\sin x + \cos x = u \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{u^2 - 1}{2},$$

ecuaţia (1.15) devenind

$$b\,u^2 + 2au - (b + 2c) = 0. \tag{1.19}$$

Ţinînd seamă de valorile extreme ale funcţiei $\sin x + \cos x$, rezultă că ecuaţia (1.19) are două soluţii acceptabile numai dacă $u_1, u_2 \in \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, soluţiile generale aflate trebuind a fi verificate, deoarece s-a folosit ridicarea la pătrat.

Ecuaţiile de forma (1.15) se mai pot rezolva şi prin subţituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, ecuaţia trigonometrică respectivă transformîndu-se într-o ecuaţie algebrică de gradul patru în t.

1.7. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{3}\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}\right) = 2(1 + \sqrt{3}),\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z.$$

R. Eliminînd numitorii, ecuaţia dată se transformă în

$$\sqrt{3}(\sin x + \cos x) - 2(1 + \sqrt{3})\sin x \cos x = 0, \tag{1}$$

adică în ecuaţia de tipul (1.15). Punînd $\sin x + \cos x = u$ şi $\sin x \cos x = \frac{u^2 - 1}{2}$,

ecuația respectivă devine

$$(1+\sqrt{3})\,u^2-\sqrt{3}u-(1+\sqrt{3})=0,$$

cu $u_1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ și $u_2=1-\sqrt{3}$.

Întrucît $\max(\sin x\pm\cos x)=\sqrt{2}$ și $\min(\sin x\pm\cos x)=-\sqrt{2}$, ambele rădăcini u_1 și u_2 obținute sînt acceptabile. Acum avem de rezolvat ecuațiile echivalente

$$\cos x+\sin x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \tag{2}$$

$$\cos x+\sin x=1-\sqrt{3}$$

care se rezolvă prin substituția $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. Astfel, prima ecuație din (2) devine

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)\,t^2-4t+\sqrt{3}-1=0$$

cu $t_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ și $t_2=2-\sqrt{3}$, de unde rezultă soluțiile $\dfrac{x_1}{2}=\dfrac{\pi}{6}+k_1\pi$ sau $x_1=\dfrac{\pi}{3}+2k_1\pi$ și $\dfrac{x_2}{2}=\dfrac{\pi}{12}+k_2\pi$ sau $x_2=\dfrac{\pi}{6}+2k_2\pi$, $k_{1,2}\in Z$.

Cea de-a doua ecuație din (2) devine

$$(2-\sqrt{3})\,t^2-2t-\sqrt{3}=0$$

cu $t_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{2\sqrt{3}-2}}{2-\sqrt{3}}$, de unde rezultă încă două soluții

$$x_3=2(\operatorname{arctg}t_3+k_3\pi)\text{ și }x_4=2(\operatorname{arctg}t_4+k_4\pi),\ k_{3,4}\in Z.$$

Folosind celelalte două metode, obținem aceleași rezultate.

Desigur că ecuația (1) se mai poate rezolva separînd cei doi termeni și apoi ridicînd la pătrat; se obține

$$3(1+\sin 2x)=2(1+\sqrt{3})\sin^2 2x,$$

ecuație de forma (1.3), care se rezolvă luîndu-se ca necunoscută $\sin 2x$, soluțiile generale obținute trebuind a fi verificate.

1.8. Să se rezolve ecuația

$$2\sin 2x=4(\sin x+\cos x)-3.$$

R. Se notează $\sin x+\cos x=u$ și ecuația dată se transformă în

$$2(u^2-1)-4u+3=0$$

sau

$$2u^2-4u+1=0$$

cu $u_1 = (2 + \sqrt{2})/2$ și $u_2 = (2 - \sqrt{2})/2$. Ținînd seamă însă că $\max(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$ și $\min(\sin x + \cos x) = -\sqrt{2}$, rezultă că avem de rezolvat doar ecuația $\sin x + \cos x = (2 - \sqrt{2})/2$, rezolvare ce se face, folosind formulele de substituție universale, ecuația respectivă transformîndu-se în $(3 - \sqrt{2})\,t^2 - 2t + 1 - \sqrt{2} = 0$ cu $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\sqrt{2} - 1}$. De aici

$$x_1 = 2 \operatorname{arctg} (1 + \sqrt{\sqrt{2} - 1}) + 2k_1\pi$$

și

$$x_2 = 2 \operatorname{arctg} (1 - \sqrt{\sqrt{2} - 1}) + 2k_2\pi.$$

Altfel. Înlocuind în ecuația dată prin enunț pe $\sin 2x$ cu $2 \sin x \cos x$, se observă, că această ecuație este simetrică în raport atît cu $\sin x$ cît și cu $\cos x$. Facem substituția $x = \frac{\pi}{4} - t$ și avem

$$\sin 2x = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \cos 2t.$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \cos t,$$

așa încît ecuația din enunț devine după efectuarea tuturor calculelor $4\cos^2 t - 4\sqrt{2}\cos t + 1 = 0$, adică o ecuație de forma (1.3), care, rezolvată în raport cu $\cos t$, ne dă

$$\cos t_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \text{ și } \cos t_2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{2},$$

ultima neavînd soluție, deoarece $(\sqrt{2} + 1)/2 > 1$. Luînd în considerare numai prima ecuație elementară, se observă că putem scrie

$$\cos t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} = 2 \sin\frac{\pi}{24} \sin\frac{7\pi}{24}.$$

Ecuații omogene de forma

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0 \tag{1.20}$$

O ecuație trigonometrică de forma (1.20) se numește omogenă, rezolvarea acesteia făcîndu-se astfel. Se înmulțesc ambii membri ai ecuației cu $\frac{1}{\cos^n x}$ (ceea ce este posibil dacă se consideră $\cos x \neq 0$) și ecuația devine

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \ldots + a_n = 0. \tag{1.21}$$

Se ia $\operatorname{tg} x = t$, obţinîndu-se astfel o ecuaţie care se rezolvă prin metodele cunoscute în algebră.

1.9. Să se rezolve ecuaţia

$$5 \sin^2 x - 2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x = 0.$$

R. Aplicînd cele de mai înainte, această ecuaţie devine

$$5 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \; k \in Z,$$

de unde rezultă imediat $\operatorname{tg} x = 1$ cu soluţia $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ şi $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{5}$ cu soluţia $x_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{5}\right) + k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Sînt numeroase exemple în care ecuaţiile date nu se prezintă sub forma (1.20), dar care, prin unele transformări simple, pot fi aduse la această formă. De exemplu:

— Ecuaţiile de forma

$$a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x - a_3 = 0$$

pot fi aduse la forma (1.20) dacă a_3 se înmulţeşte cu $\sin^2 x + \cos^2 x$.

— Ecuaţiile de forma

$$a_0 \sin^4 x + a_1 \sin^3 x \cos x + \ldots + a_4 \cos^4 x - a_5 = 0$$

pot fi aduse la forma (1.20) dacă a_5 se înmulţeşte cu $(\sin^2 x + \cos)^2$.

Ecuaţiile de forma

$$f(\alpha \cos^2 mx, \beta \sin^2 nx) = 0 \tag{1.22}$$

care conţin numai pătrate de sinusuri sau cosinusuri

Astfel de ecuaţii se rezolvă trecînd de la puteri de cosinusuri sau sinusuri la cosinusuri de arce duble cu ajutorul formulelor

$$\cos^2 mx = \frac{1 + \cos 2mx}{2}, \quad \sin^2 nx = \frac{1 - \cos 2nx}{2}.$$

1.10. Să se rezolve ecuaţia

$$\cos^2 x + \cos^2 3x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}.$$

R. Trecînd la cosinusuri de arce duble, avem

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 10x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Efectuînd calculele, ecuaţia devine

$$\cos 2x + \cos 6x + \cos 10x = 0. \tag{1}$$

Transformînd sumele în produse, ecuaţia (1) se transformă în $\cos 6x\,(2\cos 4x + 1) = 0$, soluţiile fiind date de $\cos 6x = 0$ cu $x_1 = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k_1\pi}{3}$ şi $\cos 4x = -\frac{1}{2}$ cu $x_2 = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{(2k_2+1)\pi}{4}$, $k_{1,2} \in Z$.

Ecuaţii care conţin sume de forma $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x$, *cu* $n \geqslant 2$, *adică*

$$F(\alpha(\cos^{2n} x + \sin^{2n} x) + \beta\,(\cos^{2(n-1)} x + \sin^{2(n-1)} x) + \ldots) = 0 \tag{1.23}$$

În general ecuaţiile care conţin sume de forma $\sin^2 x + \cos^{2n} x$, cu $n \geqslant 2$, se rezolvă plecînd de la identitatea $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, pe care o ridicăm la putere convenabilă obţinîndu-se în final o ecuaţie în $\sin 2x$.

1.11. Să se rezolve ecuaţia

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) + \sin^4 x + \cos^4 x = 3.$$

R. Se ţine seamă că $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$ şi că $\sin^6 x + \cos^6 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$. Ecuaţia devine

$$2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) + 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 3$$

sau, efectuînd calculele, se obţine $\sin^2 2x = 0$, de unde $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

Observaţie. În unele lucrări se mai foloseşte noţiunea de soluţie dublă, la ecuaţia de forma $\sin^2 \alpha x = 0$, $\cos^2 \alpha x = 0$ etc., ceea ce nu are sens, ţinînd seamă de faptul că soluţia reprezintă unul sau două şiruri de valori pentru argumentul x.

Ecuaţiile de forma (1.23) se mai pot rezolva şi după metoda arătată în 1.1, 1°, trecîndu-se de la cosinusuri la sinusuri, sau invers, metoda folosită însă în cazul problemei 1.11 fiind mai rapidă.

Ecuaţii conţinînd produse de funcţii trigonometrice de forma

$$\cos \alpha x \cos \beta x \cos \gamma x \text{ sau } \cos \alpha x \cos \beta x \sin \gamma x \qquad (1.24)$$

De regulă ecuaţiile care conţin produse de cosinusuri sau sinusuri de arce multiple, sau chiar produse din ambele funcţii, se rezolvă prin transformarea produselor respective în sume de cosinusuri sau sinusuri, luîndu-se în considerare formulele de bază.

1.12. Să se rezove ecuaţia

$$\cos x \cos 3x \cos 6x = -\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

R. Se ţine seamă că

$$2 \cos x \cos 3x = \cos 4x + \cos 2x,$$

$$2 (\cos 4x \cos 6x + \cos 2x \cos 6x) = \cos 10x + \cos 2x + \cos 8x + \cos 4x,$$

astfel încît ecuaţia devine

$$\cos 10x + \cos 8x + \cos 4x + \cos 2x = -2. \qquad (2)$$

Se ia ca necunoscută $\cos 2x$ şi ecuaţia (2) devine

$$(16 \cos^5 2x - 20 \cos^3 2x + 5 \cos 2x) + (8 \cos^4 2x - 8 \cos^2 2x + 1) + (2 \cos^2 2x - 1) + \\ + \cos 2x = -2$$

sau, efectuînd toate calculele,

$$8 \cos^5 2x + 4 \cos^4 2x - 10 \cos^3 2x - 3 \cos^2 2x + 3 \cos 2x + 1 = 0, \qquad (3)$$

o soluţie a ecuaţiei (3) fiind dată de $2 \cos 2x + 1 = 0$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + (2k_1 + 1)\frac{\pi}{2}$.

De menţionat că ecuaţia (2) mai are încă două rădăcini reale: $\cos 2x = \alpha$ şi $\cos 2x = \beta$, cu $\alpha \in (-1, 0)$ şi $\beta < -1$, din care după cum se vede, numai α corespunde problemei. O a doua soluţie a problemei este $x_2 = \pm \arccos |\alpha| + (2k_2 + 1)\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Mai sînt unele ecuaţii trigonometrice care după unele transformări elementare pot fi aduse la una din formele:

$$\sin x = \sin y \Rightarrow x = (-1)^k y + k\pi,$$

$$\cos x = \cos y \Rightarrow x = \pm y + 2k\pi, \qquad (1.25)$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Rightarrow x = y + k\pi,$$

Scanned with OKEN Scanner

cu condiţia ca arcele x şi y să nu fie de forma $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ în ultima ecuaţie.

1.13. Să se rezolve ecuaţia

$$m \sin (a - x) = n \sin (b - x), \text{ unde } a - b = \frac{\pi}{2}.$$

R. Folosind proprietăţile proporţiilor, ecuatia dată se poate scrie sub forma

$$\frac{\sin (a - x) + \sin (b - x)}{\sin (a - x) - \sin (b - x)} = \frac{n + m}{n - m}$$

sau

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2} - x\right)}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}} = \frac{n+m}{n-m}, \tag{1}$$

Punem $\frac{m}{n} = \operatorname{tg} \varphi$ şi, ţinînd seamă că $a - b = \frac{\pi}{2}$, ecuaţia (1) devine

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2} - x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right),$$

adică o ecuaţie de forma (1.25) cu soluţia $\frac{a+b}{2} - x = \frac{\pi}{4} + \varphi + k\pi$, de unde $x = \frac{a+b}{2} - \left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + k'\pi$, $k' \in Z$.

Altfel. Din $a - b = \frac{\pi}{2}$ rezultă $b = a - \frac{\pi}{2}$ şi ecuaţia dată se transformă în

$$m \sin (a - x) = - n \cos (a - x),$$

de unde $\operatorname{tg} (x - a) = \frac{n}{m}$ şi punînd $\frac{n}{m} = \operatorname{tg} \varphi$, se obţine soluţia $x - a = k\pi + \varphi$, $k \in Z$

1.2.4. *Ecuaţii cu soluţii singulare*

1.14. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x} = \frac{\cos x - \sin x}{\operatorname{ctg} x - 1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

cu condiția ca arcele x și y să nu fie de forma $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ în ultima ecuație.

1.13. Să se rezolve ecuația

$$m \sin (a - x) = n \sin (b - x), \text{ unde } a - b = \frac{\pi}{2}.$$

R. Folosind proprietățile proporțiilor, ecuația dată se poate scrie sub forma

$$\frac{\sin (a - x) + \sin (b - x)}{\sin (a - x) - \sin (b - x)} = \frac{n + m}{n - m}$$

sau

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2} - x\right)}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}} = \frac{n+m}{n-m}, \tag{1}$$

Punem $\frac{m}{n} = \operatorname{tg} \varphi$ și, ținînd seamă că $a - b = \frac{\pi}{2}$, ecuația (1) devine

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2} - x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right),$$

adică o ecuație de forma (1.25) cu soluția $\frac{a+b}{2} - x = \frac{\pi}{4} + \varphi + k\pi$, de unde $x = \frac{a+b}{2} - \left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + k'\pi$, $k' \in Z$.

Altfel. Din $a - b = \frac{\pi}{2}$ rezultă $b = a - \frac{\pi}{2}$ și ecuația dată se transformă în

$$m \sin (a - x) = - n \cos (a - x),$$

de unde $\operatorname{tg} (x - a) = \frac{n}{m}$ și punînd $\frac{n}{m} = \operatorname{tg} \varphi$, se obține soluția $x - a = k\pi + \varphi$, $k \in Z$

1.2.4. *Ecuații cu soluții singulare*

1.14. Să se rezolve ecuația

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x} = \frac{\cos x - \sin x}{\operatorname{ctg} x - 1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Se observă că ambii membri ai acestei ecuații nu au sens pentru $x = k\pi$. Se procedează așa cum s-a arătat în 1.1, calculîndu-se limita

$$\lim_{x \to k\pi} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x} - \frac{\cos x - \sin x}{\operatorname{ctg} x - 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \to k\pi} (\sin 2x - \sin x) = 0.$$

În consecință, $x_1 = k_1\pi$ este o soluție singulară a ecuației.

Cealaltă soluție este dată de ecuația elementară $\cos x = \frac{1}{2}$, adică $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} +$ $+ 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$. ◆

Desigur că în rezolvarea unor ecuații se pot aplica unul sau chiar mai multe din procedeele generale sau particulare arătate mai înainte. În cap. 4 se vor da numeroase exerciții a căror rezolvare va contribui într-o mai bună măsură la aprofundarea teoriei date în 1.2.

2. ECUAȚII TRIGONOMETRICE CU FUNCȚII TRIGONOMETRICE INVERSE

2.1. Forma de prezentare și metode generale de rezolvare

Ca și în cazul ecuațiilor trigonometrice tratate în capitolul 1, ecuațiile conținînd ca necunoscute una sau mai multe arcfuncții se prezintă sub forma cea mai generală

$$F(\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x) = 0, \qquad (2.1)$$

în care cel puțin una din arcfuncțiile respective trebuie să fie nenulă. De cele mai multe ori ecuațiile de acest tip se prezintă însă sub forme mai simple:

$$f(\arcsin x, \arccos x) = 0$$

sau (2.2)

$$f(\operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

De regulă, este necesar ca prin diferite transformări trigonometrice ecuaţia să fie adusă la una din formele elementare

$$\arcsin x = a;\ \arccos x = b;\ \operatorname{arctg} x = c;\ \operatorname{arcctg} x = d. \tag{2.3}$$

De îndată ce am obţinut una sau mai multe din ecuaţiile (2.3), vor trebui luate în considerare următoarele :

— *Pentru ecuaţia* $\arcsin x = a$. Funcţia $\sin x$ ia toate valorile posibile dacă se consideră intervalul de studiu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ecuaţia $\arcsin x = a$ are soluţie numai dacă $|a| \leqslant \frac{\pi}{2}$, ţinînd seama, bineînţeles, că şi $|x| \leqslant 1$, soluţia unică fiind $x = \sin a$.

Dacă argumentul x se prezintă sub forma unei funcţii de x, de exemplu $\varphi(x)$, atunci ecuaţia $\arcsin \varphi(x) = a$ are soluţii numai dacă $|\varphi(x)| \leqslant 1$ şi $|a| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

— *Pentru ecuaţia* $\arccos x = b$. Funcţia $\cos x$ ia toate valorile posibile dacă se consideră intervalul de studiu $[0, \pi]$. În consecinţă, ecuaţia $\arccos x = b$ are soluţie unică $x = \cos b$, numai dacă $b \in [0, \pi]$ şi $|x| \leqslant 1$.

Dacă în loc de argumentul x avem o funcţie $\varphi(x)$, atunci pe lîngă condiţia $b \in [0, \pi]$ se mai ia în considerare şi inegalitatea $|\varphi(x)| \leqslant 1$, care constituie condiţia de bază.

— *Pentru ecuaţia* $\operatorname{arctg} x = c$. Se ştie că funcţia $\operatorname{tg} x$ ia toate valorile posibile dacă se consideră ca interval de studiu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Prin urmare, cînd $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ecuaţia respectivă are soluţie unică $x = \operatorname{tg} c$.

— *Pentru ecuaţia* $\operatorname{arcctg} x = d$. Întrucît funcţia $\operatorname{ctg} x$ ia toate valorile posibile în intervalul $(0, \pi)$, rezultă că ecuaţia $\operatorname{arcctg} x = d$ are soluţie unică $x = \operatorname{ctg} d$ dacă şi numai dacă $d \in (0, \pi)$.

De menţionat că în toate cele patru cazuri s-a făcut precizarea de *soluţie unică*, dat fiind că în intervalele considerate arcfuncţiile respective sînt strict monotone.

Pentru rezolvarea ecuaţiilor de forma

$$f(\arcsin x, \arccos x) = 0 \text{ şi } f(\operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.1

arc-funcțiile	arcsin x	arccos x	arctg x	arcctg x
arcsin x	arcsin x	$\arccos\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0,1]$ $-\arccos\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,0)$	$\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ cu $x\in(-1,1)$	$\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x\in(0,1]$ $\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\pi$, $x\in[-1,0)$
arccos x	$\arcsin\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0,1]$ $-\arcsin\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,0)$	arccos x	$\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x\in(0,1]$ $\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x\in[-1,0)$	$\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
arctg x	$\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ cu $x\in R$	$\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in R_+$ $-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in R_-$	arctg x	$\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$, $x\in R_+^*$ $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}-\pi$, $x\in R_-$
arcctg x	$\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in R_+^*$ $-\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in R_-$	$\arccos\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in R$	$\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, $x\in R_+^*$ $\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, $x\in R_-$	arcctg x

Scanned with OKEN Scanner

se vor lua în considerare, după caz, identităţile

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \tag{2.4}$$

valabile pentru orice x admisibil.

Separat de aceste relaţii, numite în unele lucrări şi *relaţii de primă speţă*, în rezolvarea ecuaţiilor trigonometrice de tipul (2.1) sau (2.3) mai trebuie avute în vedere şi relaţiile de transformare numite şi *relaţii de speţa doua*, între diversele funcţii trigonometrice inverse, relaţii redate în tabelul 2.1.

2.2. Exemple de ecuaţii cu arcfuncţii rezolvate complet

2.1. Să se rezolve ecuaţia

$$\arcsin x + \arccos \sqrt{x} = \operatorname{arctg} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2, \text{ cu } x \in (-1,1) \setminus \{0\}.$$

R. Se transformă arcfuncţiile de sinus şi cosinus din membrul întîi în arctg, ţinînd seama de relaţiile de transformare din tabelul 2.1. Avem

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \operatorname{arctg} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2, \tag{1}$$

pentru $x \in (0, 1)$. Luăm tangenta în ambii membri din (1) şi obţinem

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) = (\sqrt{x-1} + \sqrt{x})^2$$

sau încă

$$\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}}{1 - \sqrt{\dfrac{x^2}{1-x^2} \cdot \dfrac{1-x}{x}}} = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2. \tag{2}$$

Eliminînd numitorii şi efectuînd toate calculele în ecuaţia (2), aceasta devine în final

$$4x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0. \tag{3}$$

rădăcinile ecuaţiei (3) fiind $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, din care x_3 nu verifică ecuaţia dată, deoarece ecuaţia (1) este valabilă cînd $x \in (0, 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru cazul $x \in (-1, 0)$ ecuația dată se transformă în

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \pi + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \operatorname{arctg} (\sqrt{1+x} + \sqrt{x})^2. \tag{4}$$

Trecem pe π în membrul al doilea și luînd tangentele în ambii membri ai ecuației, rezultă în final aceeași ecuație (3); de data aceasta trebuind a reține doar pe $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, deoarece x_1 și x_2 nu convin cazului studiat. În consecință, pe intervalele $(-1, 1) \setminus \{0\}$ ecuația are trei rădăcini.

2.2. Să se rezolve ecuația

$$\arcsin x + \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 2x.$$

R. Pe intervalul $(-1, 1)$ în care funcția $\arcsin x$ are sens, se face trecerea de la $\arcsin x$ la $\operatorname{arctg} x$ și ecuația devine

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 2x \tag{1}$$

Luînd tangentele arcelor în (1), aceasta devine

$$\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + x}{1 - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}} = 2x. \tag{2}$$

Efectuînd calculele, obținem o singură rădăcină acceptabilă $x = 0$.

2.3. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{arctg} (2 - \sqrt{4-x^2}) + \operatorname{arcctg} (2 + \sqrt{4-x^2}) = \frac{\pi}{6}.$$

R. Se pune mai întîi condiția ca $x \in [-2, 2]$; apoi, din tabelul (2.1) rezultă că

$$\operatorname{arctg} (2 + \sqrt{4-x^2}) = \operatorname{arctg} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x^2}} \text{ pentru } x \in [0, 2]$$

și

$$\operatorname{arcctg} (2 + \sqrt{4-x^2}) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x^2}} \text{ pentru } x \in [-2, 0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem deci de rezolvat două ecuații:

$$\operatorname{arctg}(2-\sqrt{4-x^2})+\operatorname{arctg}\frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}}=\frac{\pi}{6},\ \text{cînd}\ x\in[0,2], \tag{1}$$

și

$$\operatorname{arctg}(2-\sqrt{4-x^2})+\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}}=\frac{\pi}{6},\ \text{cînd}\ x\in[-2,0). \tag{2}$$

Luînd tangenta în ambii membri ai ecuației (1), rezultă

$$\frac{2-\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x^2}}}{1-\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{2+\sqrt{4-x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{1'}$$

Efectuînd toate calculele în (1'), inclusiv raționalizarea, rezultă ecuația bipătrată

$$3x^4+10x^2-13=0,$$

cu două rădăcini reale ± 1, din care numai $x_1=1$ convine ecuației (1).

Observație. Dacă se notează $\operatorname{arctg}(2-\sqrt{4-x^2})=\alpha$ și $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x^2}}=\beta$, atunci ecuațiile (1) și (2) devin $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{6}$ și $\alpha+(\pi+\beta)=\dfrac{\pi}{6}$; ținînd apoi seamă că $\operatorname{tg}(\pi+\beta)=\operatorname{tg}\beta$, ambele relații se reduc la $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ etc.

3. APLICAȚII ALE ECUAȚIILOR TRIGONOMETRICE LA REZOLVAREA INECUAȚIILOR ȘI SISTEMELOR TRIGONOMETRICE

3.1. Inecuații trigonometrice

3.1.1. *Forma de prezentare și diferite metode de rezolvare*

Dacă $F(x)$ este o funcție trigonometrică, atunci $F(x)\gtrless m$ se numește inecuație trigonometrică. Ținînd seamă de periodicitatea funcțiilor trigonometrice, pentru aflarea mulțimii tuturor soluțiilor se

consideră o perioadă întreagă a funcției trigonometice, care intră în compunerea inecuației considerate.

Soluțiile unora din inecuațiile trigonometrice simple, mai des întîlnite, sînt :

$$\cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\cos x \leqslant -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x > \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\operatorname{ctg} x > \sqrt{3} \Rightarrow k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ș.a.}$$

Din forma de prezentare a soluțiilor de mai înainte, se pot găsi și soluțiile altor inecuații trigonometrice simple, asemănătoare cu cele date.

Dacă se dă un sistem de inecuații trigonometrice, atunci soluția sistemului se află intersectînd mulțimile soluțiilor inecuațiilor trigonometrice date în sistem.

3.1. Să se rezolve sistemul de inecuații

$$\operatorname{tg} x > \sqrt{3}, \quad \cos 3x > -\frac{1}{2}.$$

R. Perioada comună celor două funcții trigonometrice este 2π. Soluțiile primei inecuații sînt

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{și} \quad \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}, \tag{1}$$

Iar soluțiile celei de a doua inecuații sînt

$$-\frac{2\pi}{9} < x < \frac{2\pi}{9}; \quad \frac{4\pi}{9} < x < \frac{8\pi}{9}; \quad \frac{10\pi}{9} < x < \frac{14\pi}{9}. \tag{2}$$

Intersectînd soluțiile (1) și (2), obținem soluțiile sistemului

$$\frac{4\pi}{9} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

3.2. Să se rezolve inecuația $\sin x\,(1 - 2\cos x) > 0$.

R. Această inecuație se reduce la sistemele:

$$\sin x > 0, \quad 1 - 2\cos x > 0$$

și

$$\sin x < 0, \quad 1 - 2\cos x < 0.$$

Rezolvarea acestor două sisteme de inecuații se face cu ajutorul tabelului următor, în care s-a luat ca perioadă intervalul $(-\pi, \pi)$:

x	$-\pi$				$\frac{-\pi}{3}$		0			$\frac{\pi}{3}$			π
$\sin x$	0	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	0
$1 - 2\cos x$	3	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	3
$\sin x\,(1 - 2\cos x)$	0	−	−	−	0	+	0	−	0	+	+	+	0

Din tabelul respectiv rezultă soluțiile:

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < 2k\pi \text{ și } \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \quad k \in Z.$$

Inecuațiile raționale în raport cu o anumită funcție trigonometrică (sin sau cos)

$$F(f(x)) > 0,$$

se rezolvă prin substituția $f(x) = t$, $t \in [-1, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

3.3. Să se rezolve inecuaţia $2\cos x > \sin^2 x$.

R. Se aplică substituţia de raţionalizare $\sin x = t$, cu $t \in [-1, 1]$ şi inecuaţia dată devine $t^2 + 2t - 1 \geqslant 0$, cu $t \in (-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, \infty)$ şi ţinînd seama de restricţia pusă pentru t, rezultă $t \in (-1 + \sqrt{2}, 1]$, adică $-1 + \sqrt{2} < \sin x \leqslant 1$; prin urmare, soluţia inecuaţiei din enunţ este

$$(-1)^k \arcsin(-1 + \sqrt{2}) + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z.$$

De menţionat că, dacă membrul întîi al unei inecuaţii trigonometrice este o expresie raţională în raport cu mai multe funcţii trigonometrice, atunci se aplică substituţii de raţionalizare fiecărei funcţii trigonometrice în parte.

Unele inecuaţii trigonometrice de forma $F(\sin\alpha, \cos\alpha) \gtrless 0$ se rezolvă prin folosirea interpretării grafice, considerînd că $\cos\alpha$ şi $\sin\alpha$ sînt respectiv abscisa şi ordonata unui punct de pe cercul trigonometric.

3.4. Să se rezolve inecuaţia $\cos\alpha - \sin\alpha < 1$.

R. Notînd $\cos\alpha = x$ şi $\sin\alpha = y$, avem de rezolvat sistemul $x - y - 1 < 0$ şi $x^2 + y^2 = 1$ (fig. 3.4,*a*.) Rezultă că arcele cu extremitatea pe $\overset{\frown}{AA'B'}$ verifică inecuaţia dată, adică

$$2k\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

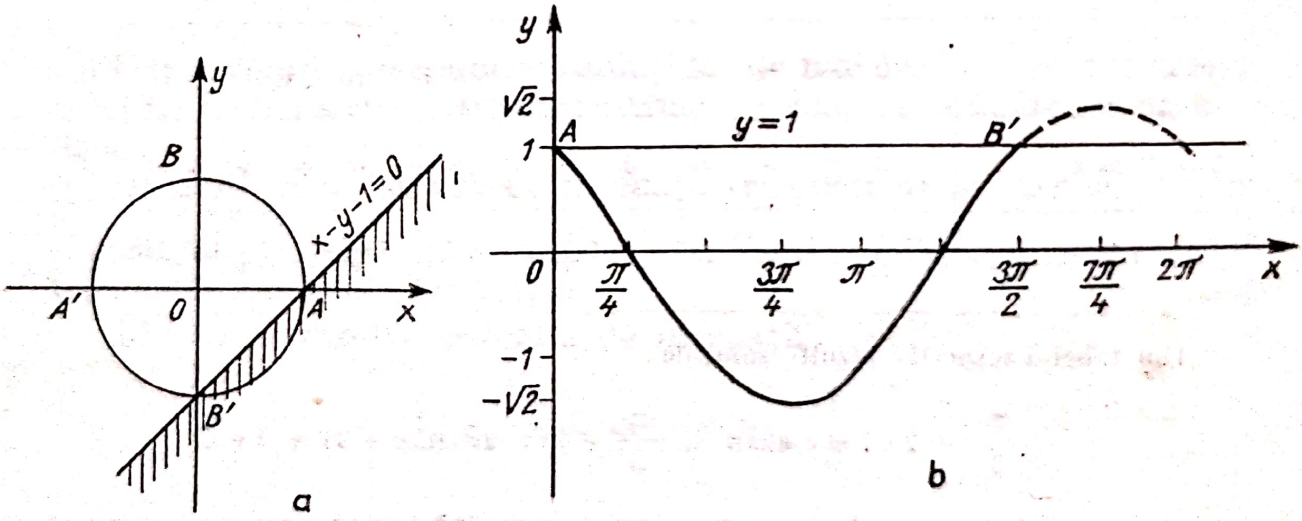


Fig. 3.4.

La aceeaşi concluzie ajungem dacă se trasează graficul funcţiei $f(\alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha$, care se va compara cu dreapta $y = 1$ (fig. 3.4, *b*).

3.5. Să se rezolve inecuaţia

$$\cos\alpha > \sqrt{2}\sin^2\alpha.$$

R. Folosind aceleaşi notaţii ca în exerciţiul precedent, rezultă sistemul

$$x > \sqrt{2}\,y^2,\quad x^2 + y^2 = 1$$

cu soluţiile $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

În fig. 3.5 în care s-a trasat cercul $x^2 + y^2 = 1$ şi parabola $y^2 = x/\sqrt{2}$, arcul MM' reprezintă soluţia inecuaţiei din enunţ, adică

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\quad k \in Z.$$

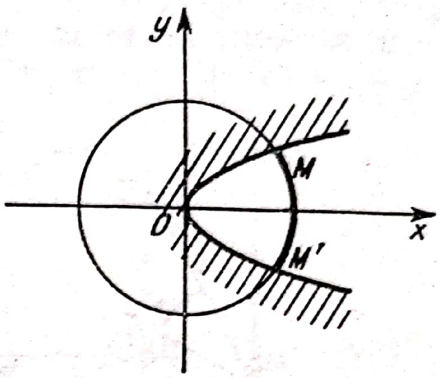


Fig. 3.5.

3.6. Să se găsească soluţia inecuaţiei

$$1 + \sqrt{3 - \operatorname{tg} x} < \operatorname{tg} x.$$

R. Inecuaţia se poate scrie şi sub forma

$$\sqrt{3 - \operatorname{tg} x} < \operatorname{tg} x - 1, \qquad (1)$$

condiţiile fiind $3 - \operatorname{tg} x \geqslant 0$, $\operatorname{tg} x - 1 > 0$, adică

$$1 < \operatorname{tg} x \leqslant 3, \qquad (8)$$

În aceste condiţii se raţionalizează în (1) şi se obţine inecuaţia $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 > 0$, cu $\operatorname{tg} x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$; ţinînd seamă şi de (2), rezultă $2 < \operatorname{tg} x \leqslant 3$, cu soluţia $\operatorname{arctg} 2 + k\pi < x \leqslant \operatorname{arctg} 3 + k\pi$, $k \in Z$.

Altfel. Se pot trasa graficele funcţiilor $f(x) = \sqrt{3 - \operatorname{tg} x}$ şi $g(x) = \operatorname{tg} x - 1$ (fig. 3.6) şi din studiul acestora rezultă soluţia de mai sus, punctul de intersecţie a celor două curbe obţinîndu-se prin rezolvarea ecuaţiei

$$\sqrt{3 - \operatorname{tg} x} + 1 - \operatorname{tg} x = 0.$$

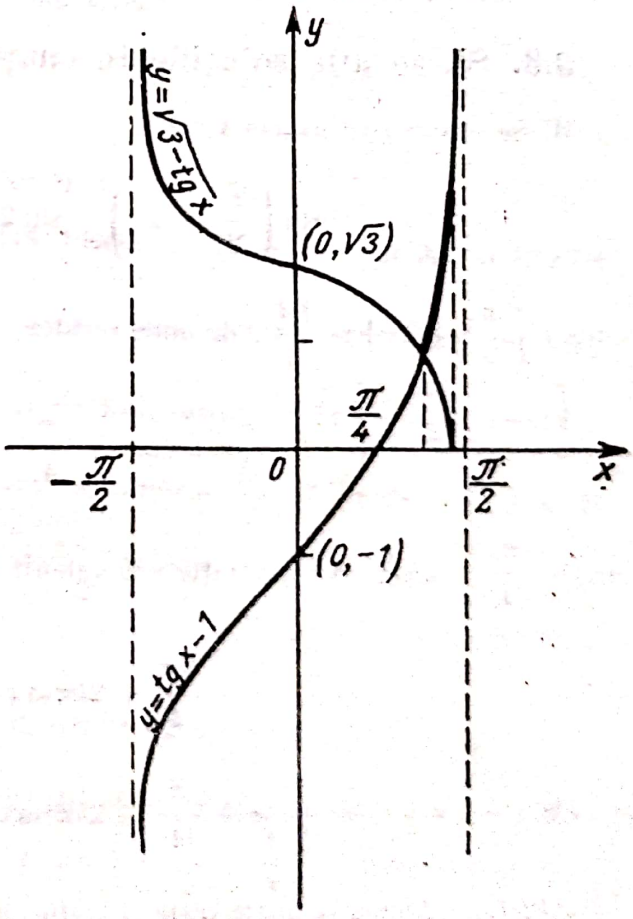


Fig. 3.6.

3.7. Să se rezolve inecuaţia

$$\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 \geqslant 0.$$

R. Se rezolvă ecuaţia $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0$, observîndu-se că $\operatorname{tg} x_1 = 2 + \sqrt{3}$ şi $\operatorname{tg} x_2 = 2 - \sqrt{3}$, de unde rezultă inecuaţiile $\operatorname{tg} x \leqslant 2 - \sqrt{3}$ şi $\operatorname{tg} x \geqslant 2 + \sqrt{3}$. Ţinînd seama că $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ şi $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$, rezultă soluţiile (fig. 3.7)

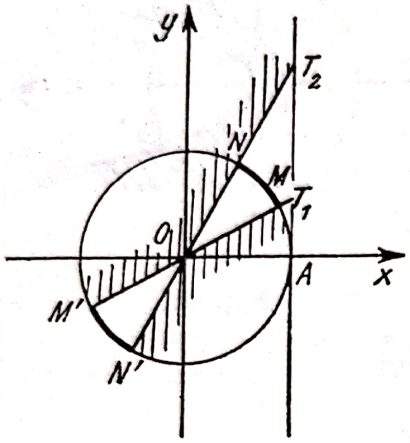


Fig. 3.7.

$$\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$$

şi

$$\frac{19\pi}{12} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{25\pi}{12} + 2k\pi,$$

arcele cu extremităţile pe $\overset{\frown}{MN}$ şi $\overset{\frown}{M'N'}$ neverificînd inecuaţia din enunţ.

3.8. Să se afle soluţiile inecuaţiei $\cos 2x - \sin 2x - 1 \geqslant 0$.

R. Se observă că putem scrie

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin 2x \geqslant 1$$

sau $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde rezultă

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant \frac{\pi}{4} - 2x \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

sau $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x \leqslant k\pi$, soluţie echivalentă cu

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \pi + 2k\pi$$

şi

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Altfel. Problema se poate trata şi grafic: se reprezintă funcţia $f(x) = \cos 2x - \sin 2x$ şi din comparaţia graficului cu dreapta $y = 1$ rezultă aceleaşi concluzii (v. fig. 3.8).

Scanned with OKEN Scanner

La rezolvarea inecuațiilor care conțin funcții trigonometrice inverse, trebuie avute în vedere : domeniul de definiție, codomeniul și proprietatea de monotonie a funcției respective.

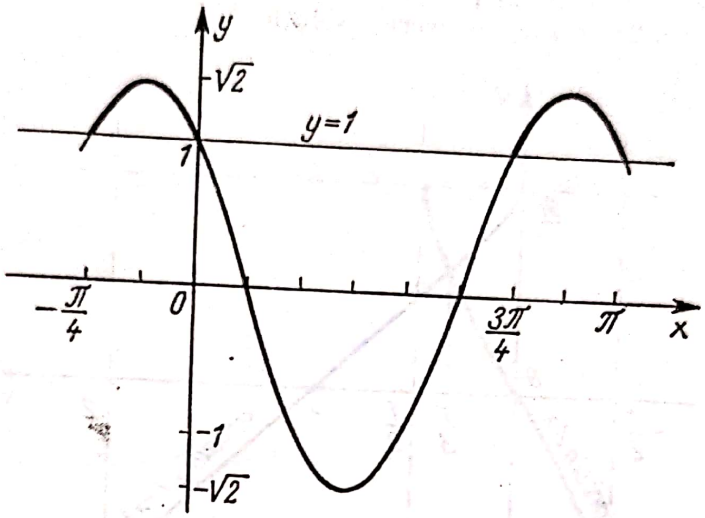


Fig. 3.8.

3.9. Să se rezolve inecuația

$$2\arcsin^2 x + \arcsin x - 1 \geqslant 0.$$

R. Se notează $\arcsin x = t$ și se rezolvă inecuația $2t^2 + t - 1 \geqslant 0$, cu soluția $t \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. Dar funcția $\arcsin x$ este definită pentru $x \in [-1, 1]$, codomeniul corespunzător fiind $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de unde rezultă că $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, -1\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; revenind la $\arcsin x$, avem soluliile $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant -1$ și $\frac{1}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$ cu $-1 \leqslant x \leqslant \sin(-1)$ și $\sin\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$.

3.10. Să se rezolve inecuația

$$\arcsin(1-x) < \arcsin 2x.$$

R. Domeniul de definiție pentru funcția $\arcsin(1-x)$ este dat de $-1 \leqslant 1-x \leqslant 1$, cu $x \in [0, 2]$, iar pentru funcția $\arcsin 2x$ este $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Intersectînd cele două mulțimi, rezultă intervalul $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Ținînd seama de faptul că pe acest in-

terval funcția este crescătoare, avem $1 - x < 2x$ sau $x > \frac{1}{3}$. Cum $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, se obține în final soluția $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. În fig. 3.10 sînt trasate graficele funcțiilor $\arcsin(1 - x)$ și $\arcsin 2x$, rezultînd aceeași soluție.

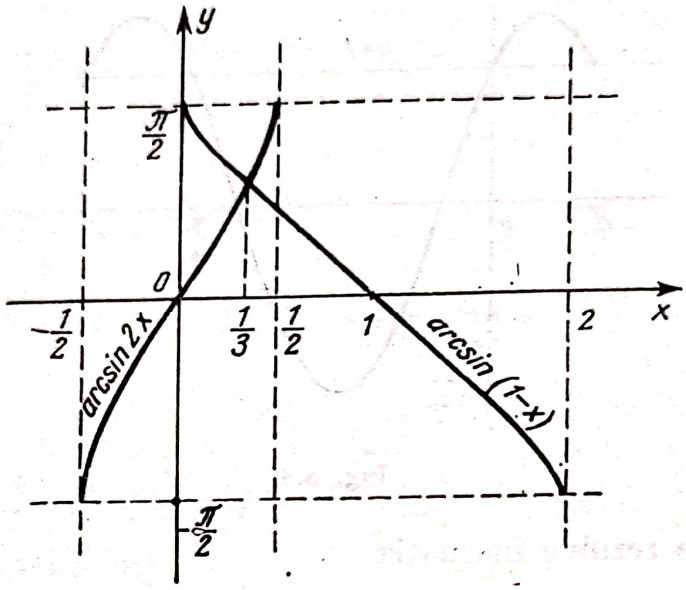


Fig. 3.10.

3.11. Să se rezolve inecuația

$$\arccos(x^2 - 2) \leqslant \cos(x - 1).$$

R. Domeniul de definiție al funcției $\arccos(x^2 - 2)$ este dat de $-1 \leqslant x^2 - 2 \leqslant 1$, cu $x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$, iar al funcției $\cos(x - 1)$ este $x \in [1 \quad \pi + 1]$; rezultă că pentru cele două funcții domeniul de definiție este $x \in [1. \sqrt{3}]$. Dar din $x^2 - 2 \leqslant x - 1$, rezultă $x^2 - x - 1 \leqslant 0$, unde $x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ și ținînd seamă de domeniul de definiție aflat, se observă că soluția inecuației este $x \in \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

3.2. Sisteme de ecuații trigonometrice

În rezolvarea sistemelor de ecuații trigonometrice se vor avea în vedere soluțiile generale ale ecuațiilor trigonometrice prevăzute în cap. 1. Metode generale de rezolvare sau categorii de sisteme care se

rezolvă după anumite metode nu se pot da. În exemplele ce urmează vor fi menționate doar unele sisteme de ecuații trigonometrice întîlnite mai frecvent.

3.12. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x - y = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 3y = 0.$$

R. Transformînd ecuația a doua în produs, obținem

$$\frac{\sin 3(x+y)}{\cos 3x \cos 3y} = 0, \text{ de unde } 3(x+y) = k\pi, \; x, y \neq (2k+1)\frac{\pi}{6}.$$

Din $x - y = \frac{\pi}{6}$ și $x + y = \frac{k\pi}{3}$ rezultă $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$ și $y = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$, $k \in Z$.

3.13. Să se rezolve sistemul

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4, \; \operatorname{tg}(x - y) = \sqrt{3}.$$

R. Dezvoltăm pe $\operatorname{tg}(x-y)$, iar pentru ușurința calculului notăm $\operatorname{tg} x = u$, $\operatorname{tg} y = v$; avem de rezolvat sistemul

$$u + v = 4, \quad \frac{u - v}{1 + uv} = \sqrt{3},$$

cu $u = 2 + \sqrt{3}$ și $v = 2 - \sqrt{3}$, de unde rezultă soluția $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ și $y = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in Z$.

3.14. Să se rezolve sistemul

$$\sin x + \sin y = 1, \; \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{y}{2} = 1.$$

R. Se observă că $x, y \neq (2k+1)\pi$; notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$, $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = v$ și sistemul dat se transformă în $u + v = 1$, $\frac{2u}{1+u^2} + \frac{2v}{1+v^2} = 1$, care se rezolvă prin substituție și are două soluții $u = 1$, $v = 0$ și $u = 0$, $v = 1$, de unde $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ și $y = k\pi$, sau $x = k\pi$ și $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

3.15. Să se rezolve sistemul $x + y = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\cos x}{\cos y} = \sqrt{3}$.

R. Din ecuația a doua deducem $\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ sau, transformînd în produse,

$$\frac{-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Ținînd seamă că $x + y = \frac{\pi}{2}$, rezultă imediat $\operatorname{tg}\frac{y-x}{2} = 2 - \sqrt{3}$ cu soluția $\frac{y-x}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi$ sau $y - x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Asociind această ecuație cu $x + y = \frac{\pi}{2}$, rezultă $x = \frac{\pi}{6} - k\pi$ și $y = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

În cazul în care avem de rezolvat un sistem de ecuații trigonometrice cu parametri, atunci este necesar să se facă anumite considerații asupra elementelor neprecizate — chiar dacă aceasta nu se cere prin enunț.

3.16. Să se rezolve sistemul $x + y = m$, $\sin x + \sin y = p$.

R. Se observă că ecuația a doua se poate scrie sub forma $2\sin\frac{m}{2}\cos\frac{x-y}{2} = p$, iar dacă $\sin\frac{m}{2} \neq 0$, adică $m \neq 2k\pi$, atunci

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{p}{2\sin\frac{m}{2}}. \qquad (1)$$

Dar ecuația (1) are soluție numai dacă $\left|\frac{p}{2\sin\frac{m}{2}}\right| \leqslant 1$; în caz contrar sistemul nu are soluții.

Această condiție fiind îndeplinită, se poate găsi un arc $\varphi \in [0, \pi]$ astfel încît să putem nota

$$\cos\varphi = \frac{p}{2\sin\frac{m}{2}}. \qquad (2)$$

Ţinînd seamă de (1) şi (2), rezultă

$$\frac{x-y}{2} = \pm\varphi + 2k\pi.$$

Deci, avem de rezolvat sistemul $x + y = m$, $x - y = \pm 2\varphi + 4k\pi$, de unde rezultă $x = \frac{m}{2} \pm \varphi + 2k\pi$ şi $y = \frac{m}{2} \mp \varphi - 2k\pi$, $k \in Z$. Dacă $m = 2k\pi$, atunci sistemul este incompatibil, dacă $p \neq 0$, şi compatibil nedeterminat dacă $p = 0$.

În mod asemănător se discută şi sistemele $x - y = a$, $\sin x - \sin y = b$; $x \pm y = m$, $\cos x \pm \cos y = p$; $\sin x \pm \cos y = q$, $x \pm y = r$, aceste ultime două sisteme reducîndu-se la cele precedente, înlocuind pe $\cos y$ cu $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$.

3.17. Să se rezolve şi să se discute sistemul

$$x + y = a, \quad \frac{\cos x}{\cos y} = b.$$

R. Se observă că dacă $\cos y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, atunci b nu poate rezulta decît dintr-o formă nedeterminată $\frac{0}{0}$ şi, prin urmare, $\cos x = 0$ şi $x = \frac{\pi}{2} + k'\pi$. Ţinînd seamă de prima ecuaţie a sistemului, ar rezulta în această situaţie $a = x + y = k\pi$. Reciproc, dacă $a = k\pi$, $x = k\pi - y$ şi $\cos x = \pm \cos y$, sistemul fiind incompatibil dacă $b \neq \pm 1$ şi nedeterminat dacă $b = 1$ (pentru k par), sau $b = -1$ (pentru k impar).

Presupunem $a \neq k\pi$ (şi deci $b \neq \pm 1$); aplicînd proprietăţile proporţiilor în ecuaţia a doua a sistemului, obţinem

$$\frac{\cos x - \cos y}{b - 1} = \frac{\cos x + \cos y}{b + 1} \qquad (b \neq \pm 1).$$

După unele calcule elementare, din ultimele două rapoarte rezultă $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{1-b}{1+b}\operatorname{ctg}\frac{a}{2}$. Se poate găsi însă un arc $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încît $\frac{1-b}{1+b}\operatorname{ctg}\frac{a}{2} = \operatorname{tg}\varphi$, de unde rezultă imediat $x - y = 2\varphi + 2k\pi$. Asociind această ecuaţie cu $x + y = a$, rezultă în final $x = \varphi + \frac{a}{2} + k\pi$ şi $y = -\varphi + \frac{a}{2} - k\pi$, $k \in Z$.

Să se rezolve şi să se discute sistemele de ecuaţii:

3.18. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = m$, $x + y = n$.

R. Se va observa că se poate scrie

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)} \quad \text{etc.}$$

Scanned with OKEN Scanner

3.19. $\cos x + \cos y = 1,$

$$\cos 2x + \cos 2y = m.$$

R. Se va ține seamă că $m \in [-2, 2]$; apoi se vor exprima $\cos 2x$ și $\cos 2y$ în funcție de $\cos x$ și $\cos y$.

3.20. $\sin x + \sin y = m,$

$$\cos x + \cos y = 1 + \sqrt{1-m^2}.$$

R. Trebuie ca $m \in [-1, 1]$; transformînd în produse și împărțind cele două ecuații, se obține $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{m}{1+\sqrt{1-m^2}}$. Pentru $m \in [0, 1]$ se pot ridica la pătrat ambele ecuații și apoi adunîndu-le sub forma obținută, rezultă $\cos (x - y) = \sqrt{1 - m^2}$.

3.21. $\sin x + \sin y = m,$

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 8m^2.$$

R. Se poate rezolva sistemul $u + v = m$ și $u^2 + v^2 = 8m^2$ (unde $\sin x = u$ și $\sin y = v$) apoi se pun condițiile $u, v \in [-1, 1]$.

3.22. $\sin^2 x + \sin^2 y = m,\ x + y = n.$

R. Se trece de la pătrate de sinusuri la cosinusuri de arce duble, obținîndu-se

$$\cos 2x + \cos 2y = 2(1-m), \quad x + y = n.$$

3.23. $\cos x + \cos y = m, \quad \sin x \sin y = n.$

R. Se observă că $m \in [-2, 2]$, iar $n \in [-1, 1]$; se poate transforma ecuația a doua în $\cos (x - y) - \cos (x + y) = 2n$, iar prima ecuație în $\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{m}{2}$. Acum, se pot lua ca necunoscute $\frac{x+y}{2} = \alpha$ și $\frac{x-y}{2} = \beta$.

3.24. $\cos x - \cos y = a, \quad \sin x + \sin y = b.$

R. Transformînd în produse cele două ecuații, prin împărțire se obține $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = -\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$.

Dacă considerăm $0 \leqslant a, b \leqslant 2$, ridicăm la pătrat cele două ecuații și prin adunarea acestora se obține

$$\cos (x + y) = 1 - \frac{a^2 + b^2}{2},$$

de unde rezultă condiția $\left| 1 - \frac{a^2 + b^2}{2} \right| \leqslant 1$ etc.

4. EXERCIȚII PROPUSE SPRE REZOLVARE

Ecuații care se pot rezolva cu ajutorul formulelor universale

4.1. Să se rezolve ecuația

$$2\cos^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1.$$

R. Se folosesc formulele $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ și $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, unde $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \neq (2k+1)\pi$; făcînd înlocuirile respective, ecuația dată devine $3t^3 - 3t^2 - t + 1 = 0$, cu rădăcinile $t_1 = 1$, $t_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, de unde rezultă imediat ecuațiile elementare $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ cu soluțiile $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

4.2. Să se rezolve ecuația $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x$.

R. Se exclud soluții de forma $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (pentru care se anulează numitorul din membrul întîi al ecuației) precum și soluții de forma $(2k+1)\frac{\pi}{2}$; ecuația se poate rezolva cu ajutorul formulelor universale, obținîndu-se soluțiile $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi$ și $x_2 = k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Altfel. Se trece 1 în membrul întîi și ecuația devine $\frac{\sin x}{\cos x - \sin x} = \sin x \cos x$, de unde rezultă $\sin x = 0$ cu $x_1 = k_1\pi$ și $\sin x + \cos x = 0$ cu $x_2 = \frac{3\pi}{4} + k_2\pi$ $\left(\text{sau } x_2 = -\frac{\pi}{4} + k_2\pi\right)$, $k_{1,2} \in Z$.

4.3. Să se rezolve ecuația $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

R. Se poate lua ca necunoscută $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ cu $x \neq (2k+1)\pi$ și ecuația devine

$$\frac{2t}{1+t^2} + 2 \cdot \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = t$$

cu $t_1 = 0$, care dă $x_1 = 2k_1\pi$ și $t_{2,3} = \pm 1$, de unde $x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

Altfel. Ecuația se mai poate scrie

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} (1 + 2 \cos x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}, \text{ cu } \sin \frac{x}{2} = 0, \; x = 2k\pi \text{ și } 2 \cos^2 \frac{x}{2} (1 +$$

$+ 2 \cos x) = 1 \Leftrightarrow (1 + \cos x)(1 + 2 \cos x) = 1$, de unde rezultă $\cos x = 0$ cu $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

4.4. Să se rezolve ecuația

$$8 \cos^3 x + \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 1.$$

R. Înlocuind pe $\sin^2 x$ cu $1 - \cos^2 x$ și efectuînd reducerea termenilor, ecuația dată se transformă în

$$8 \cos^3 x - \sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 0,$$

de unde

$$\cos x = 0 \text{ cu } x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$$

și

$$8 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0. \qquad (1)$$

Dar ecuația (1) se poate rezolva cu ajutorul formulelor universale, rezultînd ecuația

$$9t^4 - 2\sqrt{3}t^3 - 16t^2 - 2\sqrt{3}t + 7 = 0, \qquad (1')$$

unde $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, o soluție a ecuației (1') fiind $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, de unde $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$ etc.

4.5. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2.$$

R. Notînd $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, ecuația se poate scrie $\sqrt{\frac{(1-t)^2}{2}} = 2 - t$, cu < 2, sau $|1 - t| = (2 - t)\sqrt{2}$ etc.

Ecuații de forma $a \sin x + b \cos x = c$

4.6. Să se rezolve ecuația $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$.

R. Se înlocuiește $\sqrt{3}$ cu $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ și ecuația dată devine $\cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$, cu soluția generală $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

Altfel. Notînd $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, ecuația dată se transformă în $3t^2 - 2\sqrt{3}\,t + 1 = 0$, unde $t_1 = t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și deci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, cu soluția $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$

4.7. Să se rezolve ecuația $\sin x + \cos x = 1$.

R. Se poate înlocui coeficientul lui $\sin x$ (sau $\cos x$) cu $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ și ecuația devine $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cu soluția $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$.

Altfel. Se pot folosi formulele universale și ecuația dată devine $2t^2 - 2t = 0$ cu $t_1 = 0$ și $t_2 = 1$, de unde $x_1 = 2k_1\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, adică aceleași rezultate ca mai înainte.

Altfel. Ecuația dată se poate scrie și astfel:

$$\sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}, \tag{1}$$

soluțiile ecuației (1) fiind date de $\sin\frac{x}{2} = 0$ cu $x_1 = 2k_1\pi$ și $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, cu $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi_2$, $k_{1,2} \in Z$, (aceleași rezultate).

4.8. Să se rezolve ecuația $(\sqrt{3} + 2)\sin x + \cos x = \sqrt{3} + 1$.

R. Se înlocuiește $\sqrt{3} + 2$ cu $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$ și se obține $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\sin x + \cos x = \sqrt{3} + 1$, sau $\cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = (\sqrt{3} + 1)\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$ sau încă $\cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$ și $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Ecuații care conțin expresiile $\sin x \pm \cos x$ *și* $\sin x \cos x$

4.9. Să se rezolve ecuația $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

R. Se poate nota $\sin x + \cos x = u$ și ecuația se transformă în $u\left(1 - \frac{u^2 - 1}{2}\right) = 1$ sau $u^3 - 3u - 2 = 0$, cu $u_1 = u_2 = 1$ și $u_3 = -2$, din care convine doar $u_{1,2} = 1$, deoarece $\max(\sin x \pm \cos x) = \sqrt{2}$. Acum avem de rezolvat ecuația $\sin x + \cos x = 1$, ale cărei soluții sînt $x_1 = 2k_1\pi$ și $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

Altfel. Putem scrie $1 - \sin^3 x - \cos^3 x =$

$$= (1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x) - \cos x (1 - \sin^2 x) =$$

$$= (1 - \sin x)(1 - \cos x)(2 + \sin x + \cos x) = 0,$$

rezultînd aceleași soluții.

4.10. Să se rezolve ecuația $\sin^3 x - \cos^3 x = 1$.

R. Notînd $\sin x - \cos x = u$, ecuația devine $u\left(1 + \frac{u^2 - 1}{2}\right) = 1$ sau $u^3 + u - 2 = 0$, cu $u_1 = 1$, $u_{2,3} \in C$, de unde $\sin x - \cos x = 1$, cu soluțiile $x_1 = (2k_1 + 1)\pi$ și $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

4.11. Să se rezolve ecuația

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

R. Se notează $\sin x + \cos x = u$ și ecuația se transformă în

$$u^3 - 3u + \sqrt{2} = 0, \tag{1}$$

de unde se obțin rădăcinile $u_1 = \sqrt{2}$ și $u_{2,3} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$. Întrucît $\max(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$ iar $\min(\sin x + \cos x) = -\sqrt{2}$, rezultă că nu pot fi luate în considerare decît rădăcinile $u_1 = \sqrt{2}$ și $u_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$. Deci, ecuația dată este echivalentă cu $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, și $\sin x + \cos x = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$, soluțiile fiind respectiv

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi \text{ și } x_2 = \pm \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi,\ k_{1,2} \in Z.$$

4.12. Să se rezolve ecuația

$$\sin^3 3x + \cos^3 3x + \sin 6x + 1 = 0.$$

R. Punem $\sin 3x = u$ și $\cos 3x = v$; ecuația dată se transformă în

$$u^3 + v^3 + 2uv + 1 = 0, \tag{1}$$

Dar (1) se mai poate scrie și astfel:

$$u^3 + v^3 + u^2 + v^2 + 2uv = 0, \text{ de unde } u + v = 0 \text{ și } u + v - uv + 1 = 0.$$

Din $u + v = 0$ rezultă imediat soluția $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k_1\pi}{6}$; rămîne de rezolvat ecuația

$$u + v - uv + 1 = 0, \tag{2}$$

în condiția $u^2 + v^2 = 1$. Dar, singura soluție acceptabilă a ecuației (2) este $u + v = -1$, adică $\sin 3x + \cos 3x = -1$, de unde $\frac{3x}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ și $\frac{3x}{2} = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ etc.

Ecuații omogene

4.13. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 1.$$

R. Înlocuind membrul al doilea prin $\cos^2 x + \sin^2 x$, ecuația dată se transformă în $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$, cu $x_1 = k_1\pi$ și $x_2 = \frac{2\pi}{3} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Altfel. Se poate trece de la pătrate de sinusuri și cosinusuri la cosinusuri de arce duble, rezultînd ecuația $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 1$, în care, înlocuind $\sqrt{3}$ cu $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, aceasta devine $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3}$ etc.

4.14. Să se rezolve ecuația

$$(\sqrt{3} + 1) \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x = 0$$

R. Ecuația omogenă se împarte la $\cos^2 x \neq 0$ și rezultă o ecuație de gradul al doilea în $\operatorname{tg} x$, ale cărei rădăcini sînt $\operatorname{tg} x_1 = 1$ cu $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ și $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$ cu $x_2 = \frac{\pi}{12} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Altfel. Efectuînd toate calculele, se ajunge la ecuația $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3}$, în care înlocuindu-se $\sqrt{3}$ prin $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, se obține $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{6}$, de unde rezultă aceleași soluții ca prin metoda anterioară.

4.15. Să se rezolve ecuația

$$\sin^8 x - 7 \sin^4 x \cos^4 x + 6 \cos^8 x = 0.$$

R. Ecuația omogenă se împarte la $\cos^8 x \neq 0$ și se obține ecuația $\operatorname{tg}^8 x - 7 \operatorname{tg}^4 x + 6 = 0$ cu soluțiile $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + k_2\pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} \sqrt[4]{6} + k_3\pi$ și $x_4 = \operatorname{arctg}(-\sqrt[4]{6}) + k_4\pi$, $k_{1,2,3,4} \in Z$.

4.16. Să se rezolve ecuația

$$2 \sin^4 x + \sin 2x - 6 \cos^4 x = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Scriind ecuația sub forma

$$2\sin^4 x + 2\sin x\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) - 6\cos^4 x = 0,$$

aceasta se transformă într-o ecuație omogenă, prin împărțirea cu $\cos^4 x \neq 0$ devenind

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0, \tag{1}$$

o soluție a ecuației (1) fiind dată de $\operatorname{tg} x = 1$, $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $k_1 \in Z$. Rămîne de rezolvat ecuația $\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 3 = 0$, care nu are decît o singură soluție reală dată de $\operatorname{tg} x = \alpha$, cu $\alpha \in (-2, -1)$, ceea ce se poate constata folosind teorema lui Rolle.

4.17. Să se rezolve ecuația

$$2\cos^4 x - \frac{5}{4}\sin 2x + \sin^2 2x - \sin^4 x = 0.$$

R. Dacă în loc de $\sin 2x$ se scrie $\sin 2x(\sin^2 x + \cos^2 x)$, ecuația dată se transformă în ecuația omogenă

$$4\cos^4 x - 5\cos^3 x\sin x + 8\cos^2 x\sin^2 x - 5\cos x\sin^3 x - 2\sin^4 x = 0,$$

care prin împărțirea cu $\cos^4 x$ (ceea ce este posibil dacă $\cos x \neq 0$) se transformă în final în ecuația

$$2\operatorname{tg}^4 x + 5\operatorname{tg}^3 x - 8\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x - 4 = 0, \tag{1}$$

având două rădăcini reale $\operatorname{tg} x = 1$ și $\operatorname{tg} x = \alpha \in (-4, -3)$, de unde $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ și $x_2 = \operatorname{arctg}\alpha + k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

4.18. Să se rezolve ecuația

$$4\sin^4 x + \sin^2 2x + \sin 2x(\cos^2 x - 3\sin^2 x) - 2\cos 2x = 0.$$

R. Se va înlocui $\cos 2x$ cu $(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$ și ecuația se transformă în ecuația omogenă

$$3\sin^4 x - 3\sin^3\cos x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin x\cos^3 x - \cos^4 x = 0,$$

care, prin împărțire cu $\cos^4 x$ (ceea ce este posibil dacă $\cos x \neq 0$), devine

$$3\operatorname{tg}^4 x - 3\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0. \tag{1}$$

Dar ecuația (1) are numai două rădăcini reale date de $3\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$, de unde rezultă imediat soluțiile generale

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k_1\pi \text{ și } x_2 = -\frac{\pi}{6} + k_2\pi, \text{ sau } \{x_1\} \cup \{x_2\} = \left\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}, \ k \in Z.$$

Ecuații de forma $f(\alpha\sin^2 mx, \beta\cos^2 nx) = 0$

4.19. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Se trece de la puteri de cosinusuri la cosinusuri de arce multiple și se obține

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}=1, \tag{1}$$

iar după efectuarea calculelor

$$\cos 6x+\cos 4x+\cos 2x+1=0. \tag{1'}$$

care se mai poate scrie și sub forma

$$2\cos^2 3x+2\cos 3x\cos x=0 \tag{1''}$$

sau încă $\cos 3x\cos 2x\cos x=0$, de unde $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2k_1\pi}{3}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{4}+k_2\pi$, $x_3=\pm\frac{\pi}{2}+2k_3\pi$, $\{x_3\}\subset\{x_1\}$, $k_{1,2,3}\in Z$.

De observat că ecuația (1') se mai poate rezolva luînd ca necunoscută $\cos 2x=y$, rezultînd ecuația algebrică $2y^3+y^2-y=0$, cu rădăcinile $y_1=0$, $y_2=-1$, $y_3=\frac{1}{2}$.

4.20. Să se rezolve ecuația

$$\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x.$$

R. Se trece de la puteri de sinusuri la cosinusuri de arce duble, procedîndu-se ca la exercițiul anterior; se obțin soluțiile

$$x_1=\pm\frac{\pi}{2}+2k_1\pi,\quad x_2=\frac{k_2\pi}{5},\quad k_{1,2}\in Z.$$

4.21. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2.$$

R. Se trece de la puteri de cosinusuri la cosinusuri de arce duble; avem

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=0, \tag{1}$$

sau transformînd în produse, ecuația (1) devine $2\cos x\cos 2x\cos 5x=0$, cu $x_1=\pm\frac{\pi}{2}+2k_1\pi$, $x_2=\pm\frac{\pi}{4}+k_2\pi$, $x_3=\pm\frac{\pi}{10}+\frac{2k_3\pi}{5}$, unde $\{x_1\}\subset\{x_3\}$, $k_{1,2,3}\in Z$.

4.22. Să se rezolve ecuația

$$\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

R. Ecuația dată se poate scrie și sub forma

$$(1-\cos 2x)^2+(1+\sin 2x)^2=1, \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, dezvoltînd și făcînd înlocuirile corespunztoare, (1) devine

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, de unde $x_1=k_1\pi$ și $x_2=-\frac{\pi}{4}+k_2\pi$, $k_{1,2}\in Z$.

4.23. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x+\sin^2 2x+\cos^2 3x+\sin^2 4x=2.$$

R. Se trece la cosinusuri de arce duble, rezultînd ecuația $\cos 2x-\cos 4x+\cos 6x-\cos 8x=0$ cu soluțiile $x_1=\pm\frac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x_2=k_2\pi$, $x_3=\frac{k_3\pi}{5}$, unde $\{x_2\}\subset\{x_3\}$.

4.24. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x.$$

R. Se trece de la puteri de cosinusuri și sinusuri la cosinusuri de arce multiple, rezultînd ecuația $\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0$, care este echivalentă cu $\cos 4x=0$ și $2\cos 2x+1=0$, de unde

$$x_1=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{k_1\pi}{2}\text{ și }x_2=\pm\frac{\pi}{6}+(2k_2+1)\frac{\pi}{2},\ k_{1,2,3}\in Z.$$

4.25. Să se rezolve ecuația

$$\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9}{8}.$$

R. Se trece de la puteri de sinusuri la cosinusuri de arce duble; în final se ajunge la ecuația $2\cos^2 2x+4\cos 2x-1=0$, care are o singură soluție acceptabilă dată de

$$\cos 2x=\frac{\sqrt{6}-2}{2},\ x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{6}-2}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Altfel. Se înlocuiește direct $\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)$ cu $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x\pm\cos x)$ și se ajunge la ecuația

$$8\sin^4 x-16\sin^2 x+5=0\text{ etc.}$$

4.26. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2(a-x)+\cos^2(a-2x)+\cos^2(a-3x)+\cos^2(a-4x)=2.$$

R. Se trece de la puteri de cosinusuri la cosinusuri de arce duble și se obține

$$\cos 2(a-x)+\cos 2(a-2x)+\cos 2(a-3x)+\cos 2(a-4x)=0, \qquad (1)$$

sau, grupînd convenabil și transformînd în produse, (1) devine

$$\cos(2a - 5x)\cos 3x + \cos(2a - 5x)\cos x = 0,$$

de unde $\cos(2a - 5x) = 0$ cu $x_1 = \pm\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} + \frac{2a}{5}$ și $\cos 3x + \cos x = 0$ cu $x_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$ și $x_3 = \pm\frac{\pi}{4} + k_3\pi$, $k_{1,2,3} \in Z$.

4.27. Să se rezolve ecuația

$$\sin^2 a + \sin^2(a + x) + \sin^2(a + 2x) + \sin^2(a + 3x) = 2.$$

R. Se trece de la puteri de sinusuri la cosinusuri de arce duble și apoi se transformă sumele în produs, rezultînd ecuațiile echivalente $\cos(2a + 3x) = 0$, cu $x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2k_1\pi}{3} - \frac{2a}{3}$ și $\cos x = 0$, $\cos 2x = 0$, cu soluțiile $x_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, respectiv $x_3 = \pm\frac{\pi}{4} + k_3\pi$, $k_{1,2,3} \in Z$

4.28. Să se rezolve ecuația

$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \sin^2 5x = \frac{3}{2}.$$

R. Se trece de la puteri de sinusuri la cosinusuri de arce duble și ecuația dată se transformă în

$$\cos 2x + \cos 6x + \cos 10x = 0,$$

care este echivalentă cu $\cos 6x(2\cos 4x + 1) = 0$, cu soluțiile $x_1 = (2k_1 + 1)\frac{\pi}{12}$ și $x_2 = \pm\frac{\pi}{12} + (2k_2 + 1)\frac{\pi}{4}$, $k_{1,2} \in Z$.

4.29. Să se rezolve ecuația

$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \sin^2 5x = 3.$$

R. Trecerea la cosinusuri de arce duble conduce la calcule destul de complicate (rezultă ecuația $2\cos 4x \cos 6x + \cos 6x = -3$, în care se poate lua ca necunoscută $\cos 2x = y$, obținîndu-se $16y^5 - 16y^3 + 3y + 3 = 0$, ecuație cu o singură rădăcină reală $y = -1$, ceea ce se constată utilizînd teorema lui Rolle). Astfel, în cazul de față este mai simplu de rezolvat ecuația respectivă, observînd că aceasta se poate scrie sub forma

$$(\sin^2 x - 1) + (\sin^2 3x - 1) + (\sin^2 5x - 1) = 0$$

sau $\cos^2 x + \cos^2 3x + \cos^2 5x = 0$, de unde $\cos x = 0$, $\cos 3x = 0$, $\cos 5x = 0$, cu soluțiile corespunzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuații care conțin expresii de forma $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x$, $n \geqslant 2$

4.30. Să se rezolve ecuația

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{56}{41}(\sin^8 x + \cos^8 x).$$

R. Se pleacă de la $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și se ridică succesiv la puterea a treia și apoi la a patra, obținîndu-se

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{56}{41}\left(1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x\right),$$

sau luînd ca necunoscută $\sin 2x$, ecuația devine

$$28\,y^4 - 101\,y^2 + 60 = 0. \qquad (1)$$

Dar ecuația (1) este echivalentă cu ecuațiile $4y^2 - 3 = 0$ și $7y^2 - 20 = 0$, fiind acceptabile doar soluțiile $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde și soluțiile $x_1 = (-1)^{k_1}\frac{\pi}{6} + k_1\frac{\pi}{2}$ și $x_2 = (-1)^{k_2+1}\frac{\pi}{6} + \frac{k_2\pi}{2}$, $k_{1,2} \in Z$.

4.31. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x} = 2.$$

R. Se va ține seama că $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$, $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$, $\sin^8 x + \cos^8 x = 1 - 4\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin^4 x \cos^4 x$; apoi se ia ca necunoscută $\sin^2 x \cos^2 x = y$ și ecuația dată se transformă în $20\,y^3 - 37\,y^2 + 16\,y - 2 = 0$, care are o singură rădăcină acceptabilă $y_1 = \frac{1}{4}$, de unde rezultă $\sin x \cos x = \pm\frac{1}{2}$ cu

$$x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \frac{k_1\pi}{2} \text{ și } x_2 = (-1)^{k_2+1}\frac{\pi}{4} + \frac{k_2\pi}{2},\ k_{1,2} \in Z, \text{ sau } x = (2k+1)\frac{\pi}{4},\ k \in Z.$$

4.32. Să se rezolve ecuația

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 2(\sin^6 x + \cos^6 x).$$

R. Se pleacă de la $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și prin ridicarea la pătrat și la cub a acestei egalități se obține

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 2(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x). \qquad (1)$$

Luînd ca necunoscută auxiliară $\sin 2x = y$, ecuația (1) se transformă în $y^2 = 1$, de unde $x_1 = (-1)^{k_1}\frac{\pi}{4} + \frac{k_1\pi}{2}$ și $x_2 = (-1)^{k_2+1}\frac{\pi}{4} + \frac{k_2\pi}{2}$, $k_{1,2} \in Z$, sau $x = (2k \oplus 1)\frac{\pi}{4}$, $k \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

4.33. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x.$$

R. Se ia ca necunoscută $\cos^2 2x = t \in [0, 1]$ şi ecuaţia dată devine

$$24t^2 - 10t - 1 = 0, \tag{1}$$

rădăcina acceptabilă fiind $t_1 = \frac{1}{2}$, de unde rezultă soluţiile date de ecuaţiile elementare $\cos 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ecuaţii care conţin produse de funcţii trigonometrice de arce multiple

4.34. Să se rezolve ecuaţia

$$\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x.$$

R. Este uşor de observat că transformînd produsele de cosinusuri în sume, ecuaţia dată devine $\cos 2x + \cos 4x = \cos 2x + \cos 12x$, sau $\cos 12x - \cos 4x = 0$, sau încă $2 \sin 4x \sin 8x = 0$, de unde $x_1 = \frac{k_1\pi}{4}$ şi $x_2 = \frac{k_2\pi}{8}$, cu $\{x_1\} \subset \{x_2\}$, $k_{1,2} \in Z$.

Altfel. Se observă că ecuaţia se mai poate scrie şi sub forma $\sin^2 4x \cos 4x = 0$, de unde $\sin 4x = 0$ şi $\cos 4x = 0$, cu soluţiile $x_1 = k_1 \frac{\pi}{4}$ şi $x_2 = (2k_2+1)\frac{\pi}{8}$, iar $\{x_1\} \cup \{x_2\} = k\frac{\pi}{8}$, $k \in Z$.

4.35. Să se rezolve ecuaţia

$$4 \sin x \sin (x - a) = 2 \cos a - 1.$$

R. După desfacerea produsului din membrul întîi şi gruparea convenabilă a termenilor rezultă ecuaţia

$$\cos (2x - a) = \frac{1}{2}, \text{ cu } x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{a}{2} + k\pi, \ k \in Z.$$

4.36. Să se rezolve ecuaţia

$$2 \cos x \cos 2x \sin 3x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right).$$

R. Înmulţim ambii membri ai ecuaţiei cu 2 şi transformînd produsele de sinusuri şi cosinusuri în sume, obţinem

$$\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = \sin 4x + \cos 2x$$

sau $2 \sin 4x \cos 2x = \cos 2x$, de unde $x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ şi $x_2 = (-1)^{k_2} \frac{\pi}{24} + \frac{k_2\pi}{4}$, $k_{1,2} \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

4.37. Să se rezolve ecuația

$$\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x = \sin 3x \cos 4x.$$

R. Se trece de la produse de sinusuri și cosinusuri la sume de aceleași funcții:

$$\frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) + \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 7x - \sin x),$$

ecuație care este echivalentă cu $\sin 5x + \sin 3x = \sin 7x + \sin x$, sau

$$\sin 4x \cos x = \sin 4x \cos 3x, \tag{1}$$

soluțiile ecuației (1) fiind date de $\sin 4x = 0$ cu $x_1 = \frac{k_1\pi}{4}$ și $\cos 3x - \cos x = 0$ cu $x_2 = k_2\pi$ și $x_3 = k_3\frac{\pi}{2}$, adică în final $x = k\frac{\pi}{4}$, soluțiile lui x_2 și x_3 fiind cuprinse în această soluție generală.

Altfel. Ecuația dată este echivalentă cu următoarele două: $\sin x = 0$, cu $x_1 = k\pi$ și

$$\cos 2x + 2\cos x \cos 3x = \cos 4x(3 - 4\sin^2 x), \tag{1}$$

sau

$$\cos 2x + (\cos 4x + \cos 2x) = \cos 4x(2\cos 2x + 1), \tag{1'}$$

soluțiile ecuației (1') fiind date de $\cos 2x = 0$ cu $x_2 = \pm\frac{\pi}{4} + k_2\pi$ și $\cos 4x = 1$ cu $x_3 = k_3\frac{\pi}{2}$, care reunite dau $x = \frac{k\pi}{4}$, $k \in Z$.

Altfel. După scoaterea în factor a lui $\sin x$, de unde soluția imediată $x_1 = k_1\pi$, ecuația rămasă se poate scrie sub forma

$$\cos 2x + 2\cos x \cos 3x = \cos 4x(4\cos^2 x - 1), \tag{1}$$

sau ținînd seamă că $2\cos x \cos 3x = \cos 2x + \cos 4x$, ecuația (1) devine $\cos 2x + \cos 4x = 2\cos^2 x \cos 4x$, sau $\cos x \cos 3x = \cos^2 x \cos 4x$, de unde a doua soluție este dată de $\cos x = 0$, adică $x_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, iar $\cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 5x)$ sau $\cos 5x - \cos 3x = 0$ dă soluțiile $x_3 = k_4\frac{\pi}{4}$ și $x_4 = k_4\pi$, deci $x = \frac{k\pi}{4}$, $k \in Z$.

4.38. Să se rezolve ecuația

$$\sin 3x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} = \cos 3x \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

R. Transformînd în sume cei doi membri ai ecuației, aceasta devine

$$\sin x + \sin 5x + \sin 6x = \cos x + \cos 5x + \sin 6x$$

Scanned with OKEN Scanner

sau $2 \sin 3x \cos 2x = 2 \cos 3x \cos 2x$, de unde $\cos 2x = 0$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ și $\operatorname{tg} 3x = 1$ cu $x_2 = \frac{\pi}{12} + k_2 \frac{\pi}{3}$, $k_{1,2} \in Z$. De remarcat că $\left\{-\frac{\pi}{4} + k_1\pi\right\} \subset \left\{\frac{\pi}{12} + k_2 \frac{\pi}{3}\right\}$.

4.39. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x = 1.$$

R. Se ia ca necunoscută $\operatorname{tg} x = t$ și ecuația se transformă în

$$\frac{t(3t - t^3)(5t - 10t^3 + t^5)}{(1 - 3t^2)(1 - 10t^2 + 5t^4)} = 1. \qquad (1)$$

După eliminarea numitorului aceasta devine

$$t^9 - 13t^7 - 15t^6 + 35t^5 + 35t^4 - 15t^3 - 13t^2 + 1 = 0, \qquad (1')$$

Ecuația (1') este reciprocă avînd una din soluțiile $t_1 = -1$, de unde $\operatorname{tg} x_1 = -1$ și $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi$; alte două rădăcini ale ecuației reciproce (1') sînt $t_2 = 2 - \sqrt{3}$, $t_3 = 2 + \sqrt{3}$, de unde $\operatorname{tg} x_2 = 2 - \sqrt{3}$ cu $x_2 = \frac{\pi}{12} + k_2\pi$ și $\operatorname{tg} x_3 = 2 + \sqrt{3}$ cu $x_3 = \frac{5\pi}{12} + k_3\pi$, $k_{1,2,3} \in Z$.

4.40. Să se rezolve ecuația

$$4 \cos x \cos 3x \cos 6x = \cos 10\, x.$$

R. Membrul întîi al ecuației se transformă în sume de cosinusuri de arce multiple, rezultă

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 8x + \cos 10x = \cos 10\, x$$

sau

$$2 \cos 5x \cos 4x + \cos 4x = 0,$$

de unde $\cos 4x = 0$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{k_1\pi}{2}$ și $\cos 5x = -\frac{1}{2}$ cu $x_2 = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2k_2\pi}{5}$, $k_{1,2} \in Z$.

Diverse tipuri de ecuații

Să se rezolve ecuațiile :

4.41. $\sin 5x = \sin 7x$.

R. Ecuația dată fiind de forma (1.25), rezultă imediat soluțiile

$$7x + 5x = (2k_1 + 1)\pi \text{ cu } x_1 = \frac{2k + 1}{12}\pi,$$

$$7x - 5x = 2k_2\pi \qquad \text{cu } x_2 = k_2\pi,\ k_{1,2} \in Z.$$

Scanned with OKEN Scanner

Altfel. Trecem în membrul al doilea pe $\sin 5x$ și ecuația se transformă în $2\sin x\cos 6x = 0$, soluțiile fiind date de ecuațiile elementare $\sin x = 0$ cu $x_1 = k_1\pi$ și $\cos 6x = 0$ cu $x_2 = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k_2\pi}{3}$ sau încă $x_2 = (2k_2 + 1)\frac{\pi}{12}$, $k_{1,2} \in Z$.

4.42. $\sin 2x = \cos(x + a)$.

R. Se trece în membrul al doilea de la cosinus la sinusul arcului complementar, ecuația fiind de aceeași formă (1.25). Avem $\sin 2x = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (x + a)\right]$ sau, punînd $\frac{\pi}{2} - a = \alpha$, rezultă imediat $x_1 = \frac{2k_1\pi + \alpha}{3}$ și $x_2 = (4k_2 \pm 1)\pi - \alpha$, $k_{1,2} \in Z$.

4.43. $\sin(x + a) = \cos(3x + b)$.

R. Același tip de ecuație cu precedenta. Procedînd asemănător, rezultă soluțiile

$$x_1 = (4k_1 + 1)\frac{\pi}{8} - \frac{a + b}{4}, \quad x_2 = \frac{a - b}{2} - (4k_2 \pm 1)\frac{\pi}{4}, \quad k_{1,2} \in Z.$$

4.44. $\sin 2x = \cos 3x$.

R. Ecuație de tipul (1.25) cu

$$x_1 = 2k_1\pi - \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{10}(4k_2 + 1)\pi, \quad k_{1,2} \in Z.$$

4.45. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin x$.

R. Scriem pe $\cos 2x$ în funcție de sinusul arcului complementar și membrul întîi al ecuației devine

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x$$

sau

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x,$$

adică o ecuație de același tip cu (1.25).

4.46. $\sin 3x - \cos^2 x - \sin x(1 - \sin x) = 0$.

R. Se transformă totul în $\sin x$ și se obține ecuația

$$4\sin^3 x - 2\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$$

cu rădăcinile $\sin x_1 = \frac{1}{2}$, $\sin x_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde $x_1 = (-1)^{k_1}\frac{\pi}{6} + k_1\pi$, $x_2 = (-1)^{k_2+1}\frac{\pi}{4} + k_2\pi$, $x_3 = (-1)^{k_3}\frac{\pi}{4} + k_3\pi$, $k_{1,2,3} \in Z$. De observat că $\{x_2\} \cup \{x_3\} = \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{4}\right\}$.

Altfel. Se observă că ecuația se mai poate scrie și sub forma $\sin 3x - \sin x - \cos 2x = 0$ sau $2 \sin x \cos 2x - \cos 2x = 0$, de unde rezultă imediat $\cos 2x = 0$ cu $x_1 = (2k_1 + 1)\frac{\pi}{4}$ și $\sin x = \frac{1}{2}$ cu $x_2 = (-1)^{k_2}\frac{\pi}{6} + k_2\pi$, cu mențiunea că soluțiile $(-1)^{k_2+1}\frac{\pi}{4} + k_2\pi$ sînt incluse în $(2k_1 + 1)\frac{\pi}{4}$, $k_{1,2} \in Z$.

4.47. $\sin x - \cos x = 4 \sin x \cos^2 x$.

R. Se împart ambii membri ai ecuației la $\sin x \neq 0$ și punînd $\operatorname{ctg} x = y$, se obține ecuația algebrică $y^3 + 3y^2 + y - 1 = 0$, cu rădăcinile $y_1 = -1$ și $y_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}$ etc.

4.48. $2(\cos x + \cos 3x) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$.

R. Se transformă suma de cosinusuri în produs și ecuația dată devine echivalentă cu $4 \sin x \cos 2x + \sqrt{3} = 0$, cu $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$; înlocuind pe $\cos 2x$ cu $1 - 2\sin^2 x$ și efectuînd calculele, se ajunge la ecuația

$$8 \sin^3 x - 4 \sin x - \sqrt{3} = 0, \tag{1}$$

care are o singură rădăcină reală $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, căreia îi corespunde soluția $x = (-1)^k\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$, celelalte rădăcini ale ecuației (1) fiind complexe, ceea ce se poate constata formînd șirul lui Rolle, sau direct împărțind (1) la $2 \sin x - \sqrt{3}$.

4.49. $(7 \sin x - \sin 2x) \sin x + 4(\cos x - 1) = 0$.

R. Dezvoltînd și transformînd totul în $\cos x$, ecuația devine $2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 2\cos x + 3 = 0$, de unde rezultă $\cos x_1 = 1$, $\cos x_2 = -1/2$ și $\cos x_3 = 3$, această ultimă soluție nefiind acceptabilă. În consecință, soluțiile ecuației sînt $x_1 = 2k_1\pi$ și $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + (2k_2 + 1)\pi$, care reunite dau $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in Z$.

4.50. $\cos x (3\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x = 0$.

R. Ecuația este echivalentă cu $3\cos^2 x - \sin^2 x = \operatorname{tg} x$, care se poate rezolva luîndu-se ca necunoscută $\operatorname{tg} x = y$. Se obține ecuația algebrică $y^3 + y^2 + y - 3 = 0$, care are o singură rădăcină reală $y = 1$, pentru care $\operatorname{tg} x = 1$, cu soluția $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

4.51. $\cos^2 x + \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \frac{29}{3}$.

R. Luînd ca necunoscută $\sin 2x$, rezultă ecuațiile elementare $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ cu $x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{k_1\pi}{2}$, $x_2 = (-1)^{k_2+1}\frac{\pi}{6} + \frac{k_2\pi}{2}$, $k_{1,2} \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

4.52. $\cos^4 x + \sin^4 x + \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \sec^4 x + \operatorname{cosec}^4 x = \frac{21}{2}$.

R. Se ia ca necunoscută $\sin^2 x \cos^2 x = y$ și se ajunge la ecuația $4y^3 + 15y^2 + 12y - 4 = 0$, ale cărei rădăcini sînt $y_1 = \frac{1}{4}$, $y_{2,3} = \pm 2$; ultimele două rădăcini nu corespund problemei. În consecință, soluțiile ecuației sînt date de $\sin 2x = \pm 1$.

4.53. $(5 + 3\sqrt{3}) \sin x + 2(3 + \sqrt{3}) \cos^2 x - \sin 3x - 3(2 + \sqrt{3}) = 0$.

R. Trecem de la $\cos^2 x$ și $\sin 3x$ la $\sin x$ și obținem ecuația

$$4 \sin^3 x - 2(3 + \sqrt{3}) \sin^2 x + 2 + 3\sqrt{3}) \sin x - \sqrt{3} = 0, \qquad (1)$$

rădăcinile fiind $\sin x_1 = 1$, $\sin x_2 = \frac{1}{2}$ și $\sin x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde soluțiile $x_1 = (-1)^{k_1} \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $x_2 = (-1)^{k_2} \frac{\pi}{6} + k_2\pi$, $x_3 = (-1)^{k_3} \frac{\pi}{3} + k_3\pi$, $k_{1,2,3} \in Z$.

4.54. $(5 + 3\sqrt{3}) \cos x + 2(3 + \sqrt{3}) \sin^2 x + \cos 3x - 3(2 + \sqrt{3}) = 0$.

R. Se transformă $\sin^2 x$ și $\cos 3x$ în $\cos x$, rezultînd ecuația $4 \cos^3 x - 2(3 + \sqrt{3}) \cos^2 x + 2(3 + \sqrt{3}) \cos x - \sqrt{3} = 0$, ai cărei coeficienți sînt identici cu cei ai ecuației de la exercițiul precedent. Soluțiile sînt $x_1 = 2k_1\pi$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$, $x_3 = \pm \frac{\pi}{6} + 2k_3\pi$, cu $k_{1,2,3} \in Z$.

4.55. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$.

R. Soluțiile de forma $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ și $x = k\pi$ se exclud; pentru rezolvare se ia ca necunoscută $y = \operatorname{tg} x$ și ecuația se transformă în $\sqrt{3} y^4 - 2y^3 - 2\sqrt{3} y^2 + 2y + \sqrt{3} = 0$, ale cărei rădăcini sînt $y_{1,2} = \pm 1$, $y_3 = \sqrt{3}$ și $y_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, de unde rezultă soluțiile ecuației din enunț $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + k_2\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{3} + k_3\pi$ și $x_4 = \frac{5\pi}{6} + k_4\pi$, $k_{1,2,3,4} \in Z$.

4.56. $\cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + 4 \cos 4x = 2$.

R. Se înlocuiesc cosinusurile de arce multiple prin $\cos x$; rezultă ecuația $8 \cos^4 x + 3 \cos^3 x - 7 \cos^2 x - 2 \cos x = 0$ cu $\cos x_1 = 0$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, $\cos x_2 = -1$ cu $x_2 = (2k_2 + 1)\pi$ și $\cos x_3 = \frac{5 - \sqrt{41}}{4}$ cu $x_3 = \pm \arccos \frac{\sqrt{41} - 5}{4} + (2k_3 + 1)\pi$, $k_{1,2,3} \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

4.57. $4\cos^2 2x - 2\cos 3x - 1 = 0.$

R. Se transformă cosinusurile de arce multiple în $\cos x$; se ia $\cos x = y$ și se ajunge la ecuația algebrică $16y^4 - 8y^3 - 16y^2 + 6y + 3 = 0$, care se mai scrie sub forma $(4y^2 - 3)(4y^2 - 2y - 1) = 0$, de unde

$$\cos x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și } \cos x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4},$$

soluțiile rezultînd din acestea.

4.58. $9\sin 4x - 4\operatorname{tg} 2x + 9\sin 2x - 4\operatorname{tg} x = 0.$

R. Se ia ca necunoscută $\operatorname{tg} x = t$ și ecuația se transformă în

$$t(2t^6 + 7t^4 - 46t^2 + 21) = 0, \tag{1}$$

rădăcinile reale fiind $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \pm\sqrt{3}$, celelalte rădăcini fiind date de ecuația bipătrată $2t^4 + 13t^2 - 7 = 0$.

Altfel. Se grupează convenabil termenii ecuației și avem

$$9\sin 2x\,(2\cos 2x + 1) - \frac{4\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 0,$$

sau

$$\sin x = 0 \quad \text{și} \quad 18\cos^2 x\,(2\cos^2 x - 1)(4\cos^2 x - 1) - 4(4\cos^2 x - 1) = 0,$$

de unde $4\cos^2 x - 1 = 0$ și $36\cos^4 x - 18\cos^2 x - 4 = 0$, rezultînd soluția ca în prima metodă.

4.59. $\sqrt{3}\cos 5x = \cos 2x + \cos 12x.$

R. Se transformă în produs membrul al doilea al ecuației, rezultînd imediat soluțiile $x_1 = \pm\frac{\pi}{10} + \frac{2k_1\pi}{5}$ și $x_2 = \pm\frac{\pi}{42} + \frac{2k_2\pi}{7}$, $k_{1,2} \in Z$.

4.60. $\sin x + \sin(x + 40°) = \sin(x + 60°).$

R. Trecem în membrul al doilea pe $\sin x$ și transformînd în produse, obținem ecuația echivalentă $\sin(x + 40°) = \cos(x + 30°)$, sau

$$\sin(x + 40°) = \sin(60° - x), \tag{1}$$

soluția ecuației (1) fiind $x = k \cdot 180° + 10°$, $k \in Z$.

4.61. $\sin(75° + x) + \cos(105° + x) + \sin 2x = 1.$

R. Dezvoltînd și înlocuind $\sin 75° = \cos 15°$ și $\cos 75° = \sin 15°$, ecuația dată devine

$$(\cos x - \sin x)(\cos 15° - \sin 15°) = (\cos x - \sin x)^2, \tag{1}$$

de unde rezultă soluțiile

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi,\ x_2 = (-1)^{k_2}\frac{\pi}{6} + k_2\pi - \frac{\pi}{4},\ k_{1,2} \in Z.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.62. $\sin(x + 20°) + \cos(x - 10°) - \sin(x - 40°) = \sqrt{3}$.

R. Se transformă în produs diferența de sinusuri și rezultă soluțiile

$$x_1 = 40° + 360° k_1 \text{ și } x_2 = -20° + 360° k_2, \; k_{1,2}, \in Z.$$

4.63. $\cos x \sin^2 x - \sin a \cos^2 a = 0$.

R. O soluție evidentă este dată de $\cos x = \cos a$, celelalte soluții fiind date de ecuația $(1 + \sin a) \cdot \cos^2 x - \cos^2 a = 0$.

4.64. $$\frac{\cos ax + \cos 3ax + \cos 5ax}{\sin ax + \sin 3ax + \sin 5ax} = \sqrt{3}.$$

R. Se transformă sumele de cosinusuri și sinusuri în produse, rezultînd

$$\frac{\cos 3ax\,(2\cos 2ax + 1)}{\sin 3ax\,(2\cos 2ax + 1)} = \sqrt{3}, \qquad (1)$$

soluția ecuației (1) fiind dată de $\operatorname{ctg} 3a\,x = \sqrt{3}$, de unde

$$x = \frac{\pi}{18a} + \frac{k\pi}{3a}, \; k \in Z.$$

4.65. $$\frac{1 + \cos 2ax}{2 \sin ax} = \frac{\sin 2ax}{1 - \cos 2ax},$$

unde a este un parametru real.

R. Trebuie eliminate soluțiile date de $\sin ax = 0$ și $1 - \cos 2ax = 0$; singura soluție acceptabilă este dată de $\cos ax = 0$ cu $x = \pm \frac{\pi}{2a} + \frac{2k\pi}{a}$, $k \in Z$.

4.66. $\cos x - \sin x + 2 = 2\cos^2 x + \sin 2x$.

R. Ecuația se poate scrie sub forma echivalentă $\cos x - \sin x + 2\sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 0$, de unde rezultă imediat soluțiile

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi \quad \text{și} \quad x_2 = (-1)^{k_2}\frac{\pi}{6} + k_2\pi, \quad k_{1,2} \in Z.$$

4.67. $\sin(x + 2a) = \sin(x + 2b) + \sin(x + 2c)$.

R. Se dezvoltă sinusurile sumelor de arce, se transpun convenabil termenii și se obține

$$\operatorname{tg} x = \frac{-\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c}{\cos 2a - \cos 2b - \cos 2c} \quad \text{etc.}$$

4.68. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$

R. Transformînd sumele de sinusuri în produse, membrul întîi al ecuației devine

$$4 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x = 0,$$

de unde $x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, $x_2 = \pm \pi + 4k_2\pi$ și $x_3 = \frac{2k_3\pi}{5}$, $k_{1,2,3} \in Z$.

4.69. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $(2k+1)\frac{\pi}{4}$ și $(2k+1)\frac{\pi}{6}$.

R. Înlocuind $\operatorname{tg} 3x$ și $\operatorname{tg} 3x$ în funcție de $\operatorname{tg} x$, ecuația propusă se transformă în

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{și} \quad 2\operatorname{tg}^4 x - 7\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$$

cu $\operatorname{tg}^2 x = 3$ și $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2}$, de unde $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x_{3,4} = \operatorname{arctg}\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi$ și $x_5 = k_5\pi$, $k_i \in Z$, $i = 1, \ldots, 5$.

Altfel. Grupînd tangentele, avem

$$\frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0,$$

de unde rezultă $\sin 2x = 0$ cu $x = \frac{k\pi}{2}$ și $k > 1$ (conform restricțiilor din enunț) și $2\cos^2 2x + \cos x \cos 3x = 0$, sau încă $6\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$, de unde rezultă imediat $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ și $\cos 2x = \frac{1}{3}$ cu soluțiile $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + (2k_1 + 1)\frac{\pi}{2}$ și $x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

4.70. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$

R. Efectuînd toate calculele, ecuația dată se transformă în

$$(1 + 2\cos x)(2\sin x - 1)\cos x = 0$$

cu soluțiile $x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, $x_2 = (-1)^{k_2}\frac{\pi}{6} + k_2\pi$, $x_3 = \pm \frac{\pi}{3} + (2k_3+1)\pi$, $k_{1,2,3} \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

4.71. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$.

R. Se transformă în produs membrul întîi al ecuației iar în membrul al doilea se înlocuiește $\sin x$ prin $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; se obține $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, de unde $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2k_1\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Altfel. Se observă că ecuația se poate scrie astfel $2 \sin x \cos x - \sqrt{2} \sin x + (\sqrt{2} \cos x - 1)(\sqrt{2} \cos x + 1) = 0$, de unde $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$, cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi$ și

$$\sqrt{2}(\cos x + \sin x) + 1 = 0. \tag{1}$$

Dar ecuația (1) se mai poate scrie astfel:

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1'}$$

sau

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}, \tag{1''}$$

soluția ecuației (1'') fiind $x_2 = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + (2k_2 + 1)\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

4.72. $\cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x = -2$.

R. Se înlocuiesc cosinusurile de arce multiple prin $\cos x$; rezultă ecuația $\cos x (3 \cos^2 x + \cos x - 2) = 0$, de unde $x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, $x_2 = (2k_2 + 1)\pi$, $x_3 = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2k_3\pi$, $k_{1,2,3} \in Z$.

4.73. $(\sin x + \cos x)^2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

R. Efectuînd toate calculele ecuația dată se transformă în $2 \sin x (\cos x + \sin x) = 0$, de unde $x_1 = k_1\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

4.74. $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + \sin 2x$.

R. Se transformă în produs suma de sinusuri din membrul întîi al ecuației și diferența de cosinusuri din membrul al doilea, obținîndu-se:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos 2x+\cos 2x=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin 2x+\sin 2x \qquad (1)$$

sau

$$(\sin 2x-\cos 2x)\left[2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+1\right]=0. \qquad (1')$$

Soluțiile ecuației sînt date de $\sin 2x-\cos 2x=0$ cu $x_1=\frac{\pi}{8}+k_1\pi$ și $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+1=0$ cu $x_2=(-1)^{k_2+1}\frac{\pi}{6}+k_2\pi-\frac{\pi}{4}$, $k_{1,2}\in Z$.

4.75. $\dfrac{\sin x}{\sin 2x}+\dfrac{\sin 2x}{\sin x}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}, \quad x\neq k\dfrac{\pi}{2}, \quad k\in Z.$

R. Se elimină numitorii și se ajunge la ecuația $4\cos^2 x-\frac{8}{3}\sqrt{3}\cos x+1=0$, cu soluțiile $x_1=\pm\frac{\pi}{3}+2k_1\pi$ și $x_2=\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}+2k_2\pi$, $k_{1,2}\in Z$.

4.76. $\sin 2x+2\sin 4x+3\sin 10x-4\sin 4x\cos^2 3x=0.$

R. Se înlocuiește $2\cos^2 3x$ cu $1+\cos 6x$, se reduc termenii și se obține ecuația $\sin 2x+\sin 10x=0$ cu $x_1=\frac{k_1\pi}{6}$ și $x_2=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{k_2\pi}{2}$, $k_{1,2}\in Z$.

4.77. $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}+\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=2\sqrt{2}.$

R. Se ține seamă că $\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x\pm\cos x)$; rezultă soluțiile $x_1=(-1)^{k_1}\frac{\pi}{2}+k_1\pi$ și $x_2=(-1)^{k_2+1}\frac{\pi}{6}+k_2\pi$, $k_{1,2}\in Z$.

4.78. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3x}{2}\right)=3\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right).$

R. Dezvoltînd ambii membri ai ecuației, aceasta se transformă în

$$\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{3x}{2}=3\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right), \qquad (1)$$

Ţinînd seamă că $\cos\frac{3x}{2} = 4\cos^3\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2}$ şi $\sin\frac{3x}{2} = 3\sin\frac{x}{2} - 4\sin^3\frac{x}{2}$, ecuaţia (1) se transformă în

$$2\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(1 + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) = 3\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right),$$

de unde rezultă soluţia imediată dată de ecuaţia $\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0$, adică $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, observîndu-se că ecuaţia rămasă $2\left(1 + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) = 3$ furnizează aceeaşi soluţie $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Altfel. Se observă că putem scrie

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

şi efectuînd calculele, rezultă ecuaţiile $\sin x = 1$ cu $x_1 = (-1)^{k_1}\frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $k_1 \in Z$, şi $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0$ cu $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, $k_2 \in Z$, soluţie care este inclusă în x_1.

4.79. $\cos^2 2x - 2\sin 2x \sin^2 x - \cos 2x = 0$.

R. Grupînd convenabil termenii, ecuaţia dată se transformă în $(\cos 2x - 1)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$, de unde rezultă imediat soluţiile $x_1 = k_1\pi$ şi $x_2 = \frac{3\pi}{8} + \frac{k_2\pi}{2}$, $k_{1,2} \in Z$.

Observaţie. Grupînd termenii în alt mod, ecuaţia respectivă se transformă în $\sin^2 x \cos 2x + \sin^2 x \sin 2x = 0$, de unde rezultă aceleaşi soluţii.

4.80. $\sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x + \sin 3x + \cos 3x = 0$.

R. Grupînd convenabil termenii din membrul întîi şi transformînd sumele în produse, ecuaţia dată se scrie astfel:

$$4\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

de unde rezultă soluţiile $x_1 = \pm\pi + 4k_1\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

4.81. Să se rezolve ecuaţiile

$$\sin(x - a) + \sin(x - b) = \sin a + \sin b,$$
$$\cos(x - a) + \cos(x - b) = \cos a + \cos b.$$

R. Prima ecuaţie este echivalentă cu $\sin\left(x - \frac{a+b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}$, iar cea de-a doua cu $\cos\left(x - \frac{a+b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

4.82. Să se rezolve ecuaţiile

$$\sin(x-a)\sin(x-b)=\sin a\sin b.$$

$$\cos(x-a)\cos(x-b)=\cos a\cos b.$$

R. Prima ecuaţie este echivalentă cu $\cos(-a+b)-\cos(2x-a-b)=\cos(a-b)-\cos(a+b)$ cu $x_1=(a+b)+2k\pi$ şi $x_2=2k\pi$, iar cea de-a doua ecuaţie este echivalentă cu $\cos(-a+b)+\cos(2x-a-b)=\cos(a+b)+\cos(a-b)$ cu aceleaşi soluţii ca ecuaţia precedentă.

4.83. Să se rezolve ecuaţia

$$\cos x\cos 2x\cos 3x=1.$$

R. Transformînd totul în $\cos x$, ecuaţia devine

$$8\cos^6 x-10\cos^4 x+3\cos^2 x-1=0, \tag{1}$$

avînd ca rădăcini acceptabile pe $\cos x=\pm 1$, de unde $x_1=2k_1\pi$ şi $x_2=(2k_2+1)\pi$, sau şi mai general, $x=k\pi$, $k\in Z$.

Altfel. Ecuaţia se mai poate scrie sub forma $\cos 2x(\cos 2x+\cos 4x)=2$, în care luînd ca necunoscută $\cos 2x$, rezultă o singură soluţie şi anume $\cos 2x=1$ cu $x=k\pi$, $k\in Z$.

4.84. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin^3 x\cos 3x+\sin 3x\cos^3 x=\frac{3}{4}.$$

R. Se observă că ecuaţia dată se poate scrie sub forma echivalentă, după ce se trece de la arce multiple la arce simple: $\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{1}{4}$ sau $4\sin x\cos x\cos 2x=1$, sau încă $\sin 4x=1$, de unde $x=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in Z$.

4.85. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{2}{\cos x}=\frac{1}{\cos(x+2a)}+\frac{1}{\cos(x-2a)}.$$

R. Ecuaţia dată este echivalentă cu $\cos^2 x=2\cos^2 a$, soluţiile date de $\cos x=0$ şi $\cos(x\pm 2a)=0$ fiind excluse,

4.86. Să se rezolve ecuaţia

$$2\sin(x-a)\cos 2x+3\sin^2(x-a)=\cos^2(x-a)+\sin(x-3a).$$

R. Se va observa mai întîi că

$$2\sin(x-a)\cos 2x=\sin(3x-a)-\sin(x+a),$$

apoi se trece de la puteri de sinusuri şi cosinusuri la cosinusuri de arce duble şi ecuaţia dată

Scanned with OKEN Scanner

se transformă în $[\sin(x+a)-1][2\cos 2(x-a)-1]=0$, de unde rezultă soluțiile $x_1=(-1)^{k_1}\frac{\pi}{2}+k_1\pi-a$ și $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+k_2\pi+a$, $k_{1,2}\in Z$.

4.87. Să se rezolve aceeași ecuație de la exercițiul precedent, dar în raport cu a.

R. Din $\sin(x+a)-1=0$, rezultă $a_1=(-1)^{k_1}\frac{\pi}{2}+k_2\pi-x$ iar din $2\cos 2(a-x)=1$ rezultă $a_2=\pm\frac{\pi}{6}+k_2\pi+x$, $k_{1,2}\in Z$.

4.88. Să se rezolve ecuația

$$\sin^5 x+\cos^5 x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=0.$$

R. Ecuația dată se mai poate scrie sub forma

$$\sin x\cos x(\sin^5 x+\cos^5 x)+(\sin x+\cos x)=0, \tag{1}$$

observîndu-se că soluțiile de forma $x=\frac{k\pi}{2}$ sînt excluse. Dar ecuația (1) este echivalentă cu

$$\sin x+\cos x=0, \tag{1'}$$

și

$$\sin x\cos x(\sin^4 x-\sin^3 x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos^3 x+\cos^4 x)+1=0, \tag{1''}$$

din (1') rezultînd soluția $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$. Ecuația (1'') se poate rezolva în două moduri: ori ca ecuație omogenă înlocuindu-se termenul liber prin $(\sin^2 x+\cos^2 x)^3$, ori luînd ca necunoscută pe $\sin x\cos x$. În acest ultim mod de rezolvare, (1'') se transformă în

$$y^3+y^2-y-1=0. \tag{2}$$

Cum rădăcinile ecuației (2) sînt $y_1=y_2=-1$ și $y_3=1$, dar $\sin x\cos x$ nu poate lua aceste valori, rezultă că singura soluție a ecuației din enunț este aceea dată de (1').

4.89. Să se rezolve ecuația

$$2\cos^2 x+4\sin x\cos x+\cos x+\sin x+1=0.$$

R. Ecuația se reduce la $\cos x+\sin x=0$ cu $x_1=\frac{3\pi}{4}+k_1\pi$ și la $3\cos x+\sin x+1=0$ cu $x_2=(-1)^{k_2+1}\frac{\pi}{2}+k_2\pi$ și $x_3=\arccos\frac{3}{5}+(2k_3+1)\pi$, $k_{1,2,3}\in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

4.90. Să se rezolve ecuația

$$4\cos^2 x - 2\sin x\cos x + 3\cos x + 3\sin x - 3 = 0.$$

R. Aceasta se reduce la ecuațiile $\cos x + \sin x = 0$ cu $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi$ și $\cos x - 3\sin x + 3 = 0$ cu soluțiile $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$ și $x_3 = \arccos\frac{3}{5} + (2k_3+1)\pi$, $k_{1,2,3} \in Z$.

4.91. Să se afle valorile unghiului x pentru care

$$(\sin x + i\cos x)(\sin 2x + i\cos 2x)(\sin 3x + i\cos 3x) = \frac{i+1}{\sqrt{2}}.$$

R. Înmulțind ambii membri ai egalității cu $-i^3$, aceasta se transformă în $(\cos x - i\sin x)^6 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, de unde rezultă imediat

$$\cos 6x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{și} \quad \sin 6x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

soluția comună a ecuațiilor (1) fiind $6x = 135° + k\,360°$, $k \in Z$.

Să se rezolve ecuațiile :

4.92. $\sin x + 3\cos x + \sin 3x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2} = 0.$

R. Se trece de la sinusuri și cosinusuri de arce multiple la arce simple, rezultînd ecuațiile $\cos^2 x = 0$ cu soluția $x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$ și $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cu soluția $x_2 = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

4.93. $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}.$

R. Se observă că soluțiile de forma $\frac{k\pi}{2}$ sînt excluse. Eliminînd numitorii, ecuația dată se transformă în

$$\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x\cos x, \tag{1}$$

care se rezolvă prin substituția $\sin x + \cos x = u$, astfel încît (1) devine

$$\sqrt{2}u^2 - u - \sqrt{2} = 0. \tag{2}$$

Rezolvînd ecuația (2) și ținînd seamă de substituția făcută, se obțin soluțiile $x_1 = 2k_1\pi + \frac{\pi}{4}$ și $x_2 = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + (2k_2+1)\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

Altfel. Se observă că putem scrie $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sin 2x$ sau $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x$ cu soluția $x+\frac{\pi}{4} = (-1)^k 2x + k\pi \quad k \in Z$.

4.94. $8\cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.

R. Se observă că $x \neq k\pi/2$, $k \in Z$; se elimină numitorii și se ajunge la ecuația echivalentă

$$2\cos x \sin 2x = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right). \tag{1}$$

Membrul întîi fiind echivalent cu $\sin x + \sin 3x$, ecuația (1) se poate scrie sub forma

$$\sin 3x = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - \sin x \tag{1'}$$

sau, transformînd în produs membrul al doilea și transpunînd apoi termenii, se ajunge la ecuația

$$\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$$

cu soluțiile $x_1 = \frac{\pi}{6} + k_1\frac{\pi}{2}$ și $x_2 = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Altfel. Se pot folosi formulele universale, ecuația transformîndu-se în

$$\sqrt{3}t^6 + 14t^5 + \sqrt{3}t^4 - 36t^3 - \sqrt{3}t^2 + 14t - \sqrt{3} = 0, \tag{2}$$

unde $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Dar (2) este o ecuație reciprocă care, după împărțirea cu $t^3 \neq 0$, devine

$$\sqrt{3}\left(t^3 - \frac{1}{t^3}\right) + 14\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + \sqrt{3}\left(t - \frac{1}{t}\right) - 36 = 0. \tag{2'}$$

Făcînd substituția $t - \frac{1}{t} = z$, se obține o nouă ecuație

$$\sqrt{3}z^3 + 14z^2 + 4\sqrt{3}z - 8 = 0, \tag{3}$$

cu o rădăcină $z_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow t - \frac{1}{t} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $t_2 = -\sqrt{3}$, de unde $\frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{6} + k_1\pi$ și $x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k_2\pi$. Ecuația (3) mai are încă două rădăcini reale $z_{2,3} = -2(\sqrt{3} \pm 2)$, care înlocuite în $z = t - \frac{1}{t}$ mai dau și celelalte rădăcini ale ecuației (2).

De observat că metoda aceasta — în cazul de față — conduce la dificultăți de calcul.

Altfel. Ecuația dată se mai poate scrie sub forma $8 \sin x \cos x = \sqrt{3} + \operatorname{tg} x$, cu $\cos x \neq 0$ sau

$$4 \sin 2x = \sqrt{3} + \operatorname{tg} x. \tag{3}$$

Se ia $\operatorname{tg} x = t$ și se obține ecuația

$$\frac{8t}{1+t^2} = \sqrt{3} + t, \tag{3'}$$

care este echivalentă cu

$$t^3 + \sqrt{3}t^2 - 7t + \sqrt{3} = 0, \tag{3''}$$

aceasta având rădăcinile $t_1 = \sqrt{3}$ și $t_{2,3} = -\sqrt{3} \pm 2$, de unde rezultă imediat soluțiile ecuației date.

4.95. $8 \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}, \quad x \neq \dfrac{k\pi}{2}, \quad k \in Z.$

R. Se poate aplica metoda a treia de la ecuația precedentă; înmulțind ecuația cu $\cos x$, se obține

$$4 \sin 2x = \sqrt{3} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}. \tag{1}$$

Se ia ca necunoscută $\operatorname{tg} x = t$ și (1) se transformă în

$$\sqrt{3}t^3 - 7t^2 + \sqrt{3}t + 1 = 0, \tag{1'}$$

care are ca rădăcini $t_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $t_{2,3} = \sqrt{3} \pm 2$, cu soluțiile evidente pentru $\operatorname{tg} x$.

4.96. $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 8 \cos^2 x.$

R. Transformăm în produse membrul întîi al ecuației și obținem $\dfrac{\cos x}{\sin x \cos 2x} = 8 \cos^2 x$, de unde $\cos x = 0$ cu $x_1 = \pm \dfrac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, rămînînd de rezolvat ecuația $\dfrac{1}{\sin x \cos 2x} = 8 \cos x$, care se mai scrie sub forma $2 \sin 4x = 1$ cu soluția $x_2 = (-1)^{k_2} \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k_2\pi}{4}$, $k_{1,2} \in Z$.

Altfel. Dacă se ia ca necunoscută $\operatorname{tg} x = t$, ecuația dată devine $t^4 + 8t^3 + 2t^2 - 8t + 1 = 0$, care se rezolvă cu substituția $t - \dfrac{1}{t} = u$.

4.97. $1 - \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 + \sin x}$ pe mulțimea $x \in [0,\ 2\pi]$.

R. Ecuația dată se poate scrie

$$1 - \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| = |\cos x|, \tag{1}$$

de unde rezultă că ecuația (1) este echivalentă cu următoarele:

$$1 - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = \cos x, \quad \text{pentru } x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right], \tag{2}$$

$$1 - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = -\cos x, \quad \text{pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right], \tag{3}$$

$$1 + \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = -\cos x, \quad \text{pentru } x \in \left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right], \tag{4}$$

$$1 + \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = \cos x, \quad \text{pentru } x \in \left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right], \tag{5}$$

care se rezolvă luînd ca necunoscută pe $\cos\frac{x}{2}$. Rezultă soluțiile: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$, la care se adaugă perioadele corespunzătoare.

4.98. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x + a) = 0$.

R. Ecuația se reduce la

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a = 0$$

cu soluțiile $x_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}\right) + k_1\pi$ și $x_2 = \pi - \frac{a}{2} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Altfel. Se poate scrie $\operatorname{tg}(a + x) = \operatorname{tg}(-x)$, de unde $x + a = k\pi - x$, sau $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{a}{2}$ (a se vedea formulele (1.25)).

4.99. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg} x = 2$.

R. Se dezvoltă $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ și se ajunge la ecuația $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0$, cu soluțiile $x_1 = \frac{5\pi}{12} + k_1\pi$ și $x_2 = \frac{\pi}{12} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

4.100. $\operatorname{tg}(x-a)+\operatorname{tg}(x-b)=\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b.$

R. Se poate lua ca necunoscută $\operatorname{tg}x$ și se ajunge la o ecuație de gradul al doilea. *Altfel.* Ecuația este echivalentă cu

$$\frac{\sin(x-a-b)}{\cos(x-a)\cos b}+\frac{\sin(x-a-b)}{\cos(x-b)\cos a}=0,$$

de unde rezultă $\sin(x-a-b)=0$, cu $x=k\pi+(a+b)$ și

$$2\cos a\cos b\cos x+\sin x\sin(a+b)=0,$$

cu $\operatorname{tg}x=-\dfrac{2\cos a\cos b}{\sin(a+b)}$.

4.101. $\operatorname{tg}(x-a)\operatorname{tg}(x-b)=\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b.$

R. Se dezvoltă $\operatorname{tg}(x-a)$ și $\operatorname{tg}(x-b)$ și se ia ca necunoscută $\operatorname{tg}x$; se obțin soluțiile $x_1=k_1\pi$, $x_2=(a+b)+k_2\pi$, $k_{1,2}\in Z$.

4.102. $\operatorname{tg}(x+a)+\operatorname{tg}(x-a)=2\operatorname{ctg}x.$

R. Se observă că soluțiile de forma $x=k\pi$ și $x\pm a=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ sînt excluse; pentru rezolvare se transformă sumele de tangente în produse și ecuația dată se transformă în

$$\sin^2 x=\cos(x+a)\cos(x-a) \tag{1}$$

sau, dezvoltînd în (1), se obține în final

$$\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a. \tag{1'}$$

soluțiile fiind $x=(-1)^k\arcsin\dfrac{\cos a}{\pm\sqrt{2}}+k\pi$, $k\in Z$.

4.103. $\operatorname{tg}(x-a)\operatorname{tg}(x-b)=\operatorname{tg}^2 x.$

R. Se dezvoltă $\operatorname{tg}(x-a)$, respectiv $\operatorname{tg}(x-b)$; rezultă soluția dată de $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\sin a\sin b}{\sin(a+b)}$.

4.104. $\operatorname{tg}(x+a)+\operatorname{tg}(x-a)=\operatorname{tg}2x.$

R. Ecuația se scrie sub forma

$$\frac{\sin 2x}{\cos(x+a)\cos(x-a)}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x},$$

de unde rezultă $\sin 2x=0$ cu $x_1=\dfrac{k\pi}{2}$ și $\cos(x+a)\cos(x-a)=\cos 2x$. Dar ultima ecuație se poate scrie sub forma $\cos 2x+\cos 2a=2\cos 2x$, de unde rezultă, ținînd seamă de (1.25), $x_2=\pm a+k_2\pi$, $k_{1,2}\in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

4.105. $\operatorname{tg} m\,x \operatorname{tg} n\,x = 1.$

R. Ecuația dată se poate scrie sub forma echivalentă

$$\operatorname{tg} m\,x = \operatorname{ctg} nx,\ m, n \in Q \tag{1}$$

(observînd că $\operatorname{tg} n\,x \neq 0$). Dar ecuația (1) se mai poate scrie și sub forma

$$\operatorname{tg} m\,x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - n\,x\right), \tag{1'}$$

soluția rezultată din (1') fiind $mx = \frac{\pi}{2} - nx + k\pi$, de unde

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{2(m+n)},\quad m \neq -n. \tag{2}$$

În (2) pot fi cuprinse și soluții străine, care se determină însă punînd condiția

$$m\,x = \frac{(2k+1)\pi}{2(m+n)}\,m = \frac{2k'+1}{2},$$

de unde rezultă

$$n = \frac{2(k-k')\,m}{2k'+1},\ k, k' \in Z.$$

4.106. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0.$

R. Se grupează convenabil termenii din membrul întîi al ecuației, transformîndu-se sumele de tangente în produse; se obține ecuația echivalentă

$$\frac{\sin 5x}{\cos x \cos 4x} + \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} = 0,\ x \neq \frac{k\pi}{4} \text{ și } x \neq \frac{k\pi}{3},\ k \in Z. \tag{1}$$

Dar ecuația (1) este echivalentă cu $\sin 5x = 0$, cu $x_1 = \frac{k\pi}{5}$ și

$$\cos 2x \cos 3x + \cos x \cos 4x = 0. \tag{1'}$$

Trecînd în (1') la $\cos 2x$, această ecuație devine

$$4\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0,$$

rezultînd soluțiile $x_2 = k_2\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ și $x_3 = k_3\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{8}$, $k_{1,2,3} \in Z$.

4.107. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} 3x + \operatorname{ctg} 4x = 0,\ x \neq \frac{k\pi}{3},\ x \neq \frac{k\pi}{4},$ $k \in Z.$

Scanned with OKEN Scanner

R. Transformînd sumele de contangente în produse, ecuația devine

$$\frac{\sin 5x\,(5-8\sin^2 x)}{\sin 3x \sin 4x}=0,$$

de unde $x_1=k_1\frac{\pi}{5}$ ($k_1\neq$ multiplu de 5),

$$x_2=(-1)^{k_2}\arcsin\frac{5}{8}+k_2\pi \text{ și } x_3=(-1)^{k_3+1}\arcsin\frac{5}{8}+k_3\pi,\ k_{1,2,3}\in Z.$$

4.108. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

R. Membrul al doilea al ecuației se poate scrie astfel :

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\ \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}=\frac{(1-\sin x)^2}{\cos x(1+\sin x)}. \qquad (1)$$

Ecuația dată devine $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{(1-\sin x)^2}{\cos x\,(1+\sin x)}$, cu $\cos x\neq 0$ și $\sin x\neq -1$, de unde se obține $3\sin x=1$, cu $x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+k\pi$, $k\in Z$.

4.109. $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4\cos^2 x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$,

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\neq 0$.

R. După efectuarea primelor calcule, ecuația dată se transformă în

$$-\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4\cos^2 x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-\cos x}$$

sau $\operatorname{tg} x=2\sin x\cos x$, de unde $x_1=k_1\pi$ și $x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{k_2\pi}{2}$, $k_{1,2}\in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

4.110. $\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)=\dfrac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$.

R. Ecuația este echivalentă cu

$$\frac{\cos 2x-\cos 2a}{\cos 2x+\cos 2a}=\frac{\frac{1}{2}-\cos 2a}{\frac{1}{2}+\cos 2a},$$

de unde rezultă imediat $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$ cu $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$.

Altfel. Înlocuind $\cos 2a$ cu $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a}$ și $\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)$ cu $\dfrac{\operatorname{tg}^2 a-\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg}^2 x}$, se obține $\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{3}$, de unde $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$.

4.111. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x$.

R. Notăm $\operatorname{tg} x=t$ și ecuația devine $t+\dfrac{1}{t}=t^2+\dfrac{1}{t^2}$, de unde $t_1=t_2=1$ și $t_{3,4}\in C$ deci $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$.

4.112. $(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

R. Ecuația dată este echivalentă cu

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin 2x}. \tag{1}$$

Dar, ținînd seamă de inegalitățile evidente $\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 1$ și $\left|\dfrac{1}{\sin 2x}\right|\geqslant 1$, rezultă că ecuația (1) poate fi satisfăcută de soluțiile date de ecuațiile elementare:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad \text{și}\ \sin 2x=1,\\ &\text{b)}\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \ \text{și}\ \sin 2x=-1, \end{aligned} \tag{1'}$$

soluția generală a ecuațiilor (1') fiind $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in Z$.

4.113. $4 \sin 4x + \operatorname{tg} 2x + 4 \sin 2x + \operatorname{tg} x = 0.$

R. Se grupează convenabil termenii, după care se transformă sumele în produse, rezultînd ecuația echivalentă

$$8 \sin 3x \cos x + \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 0 \tag{1}$$

cu $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ și $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$. Soluțiile ecuației (1) sînt $x_1 = \frac{k_1\pi}{3}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$ și $x_3 = \pm\frac{\pi}{3} + (2k_3+1)\pi$, $k_{1,2,3} \in Z$, sau reunind, rezultă $x = \frac{k\pi}{3}$, $k \in Z$.

4.114. $6 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x.$

R. Observîndu-se că soluții de forma $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{k\pi}{3}$ și $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ se exclud, ecuația se poate scrie sub forma echivalentă $5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 3x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x$ sau, după transformarea sumelor în produse și simplificare,

$$5 \cos^2 2x = \sin x \sin 3x,$$

$$5 \cos^2 2x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x),$$

$$12 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0, \tag{1}$$

soluțiile ecuației (1) fiind date de $\cos 2x = \frac{1}{3}$ și $\cos 2x = -\frac{1}{4}$, de unde $x_1 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + k_1\pi$ și $x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + (2k_2+1)\frac{\pi}{2}$, $k_{1,2} \in Z$.

4.115. $\dfrac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

R. Se observă că soluții de forma $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ și $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ nu sînt acceptabile; apoi, pentru rezolvare se va ține seamă că $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos 2x$ și că $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x \cos 2x}$, rezultînd fără nici o dificultate soluția dată de ecuația elementară $\operatorname{tg} 2x = 1$, adică $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

4.116. $\cos x + \sin x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x = -1.$

R. Ecuația dată este echivalentă cu următoarele: $\sin x + \cos x + 1 = 0$ și $\sin x \cos x + 1 = 0$, soluțiile rezultînd imediat din aceste două ecuații.

4.117. $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x + 8 \operatorname{tg} 8x + 16 \operatorname{ctg} 16x = \sqrt{3}.$

R. Grupînd ultimii doi termeni din membrul întîi al ecuației avem

$$8 \operatorname{tg} 8x + \frac{16(1 - \operatorname{tg}^2 8x)}{2 \operatorname{tg} 8x} = \frac{8}{\operatorname{tg} 8x}. \qquad (1)$$

Grupăm acum (1) cu al treilea termen din membrul întîi al ecuației și avem

$$4 \operatorname{tg} 4x + \frac{8(1 - \operatorname{tg}^2 4x)}{2 \operatorname{tg} 4x} = \frac{4}{\operatorname{tg} 4x}, \qquad (2)$$

Se repetă operația cu ceilalți termeni ai ecuației și se ajunge în final la $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \sqrt{3}$, de unde $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$.

4.118. $\sin^3 x (1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x (1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$

R. Trebuie ca $x \neq k\pi$ și $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; apoi, se observă că putem scrie ecuația astfel:

$$\frac{\sin^3 x(1 + \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} + \cos^3 x (1 + \operatorname{tg} x) = \frac{(1 + \operatorname{tg} x)(1 - \operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

de unde rezultă prima soluție dată de $\operatorname{tg} x + 1 = 0$ cu $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi$. Ecuația rămasă se poate scrie sub forma

$$\sin^3 x + \cos^3 x \sin x = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \operatorname{tg} x,$$

sau

$$\sin x (1 + \operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{tg} x (1 - \operatorname{tg} x) = 0, \qquad (1)$$

Excluzînd soluția dată de $\sin x = 0$ (restricție rezultată din enunț), (1), devine

$$\sin x - \cos x + 1 = 0, \qquad (1')$$

Dar nici soluțiile ecuației (1'), $x_2 = 2k_2\pi$ și $x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k_2\pi$ nu convin problemei (restricții din enunț). În consecință, singura soluție acceptabilă este $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi$, $k_1 \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

4.119. $\operatorname{tg} 4x = 2\sqrt{3}(\cos^4 x - \sin^4 x)$.

R. Ținînd seamă că $\operatorname{tg} 4x = \dfrac{2 \sin 2x \cos 2x}{1 - 2 \sin^2 2x}$, ecuația din enunț se poate scrie sub forma

$$2\sqrt{3}(1 - 2\sin^2 2x)\cos 2x - 2 \sin 2x \cos 2x = 0, \tag{1}$$

fiind echivalentă cu următoarele:

$$\cos 2x = 0 \text{ cu } x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + k_1\pi.$$

$$\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ cu } x_2 = (-1)^{k_2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + k_2\pi \text{ și}$$

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cu } x_3 = (-1)^{k_3+1} \frac{\pi}{3} + k_3\pi, \; k_{1,2,3} \in Z.$$

Altfel. Ecuația dată se poate scrie sub forma

$$\sin^3 x \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} + \cos^3 x \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x),$$

de unde rezultă soluția dată de $\cos x + \sin x = 0$, adică $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi$, ecuația rămasă $\cos x - \sin x = 1$ neavînd soluții acceptabile (a se vedea restricțiile puse la începutul rezolvării).

4.120. $(\cos x + i \sin x)(\cos 2x + i \sin 2x) \ldots (\cos nx + i \sin nx) = 1$.

R. Ecuația dată este echivalentă cu

$$\cos \frac{n(n+1)}{2} x + i \sin \frac{n(n+1)}{2} x = 1,$$

de unde rezultă imediat

$$\cos \frac{n(n+1)}{2} x = 1 \text{ și } \sin \frac{n(n+1)}{2} x = 0,$$

cu soluțiile corespunzătoare.

4.121. $\sin \dfrac{n+1}{2} x + \sin \dfrac{n-1}{2} x = \sin x$.

Scanned with OKEN Scanner

R. Se transformă membrul întîi în produse; rezultă

$$x_1 = (4k_1 \pm 1)\pi \text{ și } x_2 = \frac{2}{n}\left[k_2\pi + (-1)^{k_2}\frac{\pi}{2}\right],\ k_{1,2} \in Z.$$

4.122. $\dfrac{1}{\cos x \cos 2x} + \dfrac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \ldots + \dfrac{1}{\cos nx \cos (n+1)x} = 0.$

R. Pentru calculul sumei din membrul întîi al ecuației se pleacă de la $\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \dfrac{\sin (a-b)}{\cos a \cos b}$; rezultă ecuația $\dfrac{\operatorname{tg}(n+1)x - \operatorname{tg} x}{\sin x} = 0$ cu soluția $x = \dfrac{k\pi}{n}$, $k \in Z$.

4.123. $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$.

R. Înlocuim $\cos(\pi \sin x)$ cu sinusul arcului complementar; rezultă ecuațiile $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2} + 2k_1$ și $\cos x - \sin x = \pm 1 - \dfrac{1}{2} + 4k_2$; pentru a avea soluții acceptabile, este necesar ca numerele k_1 și k_2 să verifice dubla inegalitate $-\sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2} + 2k_{1,2} \leqslant \sqrt{2}$, care este însă satisfăcută doar pentru $k_1 = k_2 = 0$. Prin urmare, ecuația din enunț se reduce la rezolvarea ecuațiilor echivalente $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$ și $\cos x - \sin x = \dfrac{1}{2}$, care se poate face utilizînd formulele universale.

4.124. $\sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) = 1$.

R. Se înlocuiește $\cos(\pi \ln x)$ cu sinusul arcului complementar, apoi se transformă în produs membrul întîi al ecuației, rezultînd $2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(\pi \ln x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, sau $\ln x = \pm\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 2k$ cu $x_1 = e^{2k_1}$ și $x_2 = e^{2k_2 + \frac{1}{2}}$.

4.125. $\sin(\pi \operatorname{arctg} x) = \cos(\pi \operatorname{arctg} x)$.

R. Se observă că putem scrie

$$\sin(\pi \operatorname{arctg} x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{arctg} x\right)$$

sau ceea ce este echivalent cu $\operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{4} + k$, cu condiția $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{1}{4} + k < \dfrac{\pi}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

4.126. $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x)$.

R. Ecuația se poate scrie sub forma $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x\right)$, de unde rezultă ecuația

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} - \operatorname{ctg} x + k, \tag{1}$$

echivalentă cu

$$2 \operatorname{tg}^2 x - (2k+1) \operatorname{tg} x + 2 = 0. \tag{1'}$$

Pentru ca aceasta să aibă soluții reale este necesar ca $(2k+1)^2 - 16 \geqslant 0$ etc.

4.127. $\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x - 2 = 0$.

R. Este necesar ca $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, adică $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; se ține seamă apoi de relația $\log_a b \log_b a = 1$ și se rezolvă sistemul $u + v - 2 = 0$, $uv = 1$ cu $u = v = 1$, deci $\log_{\cos x} \sin x = 1$.

4.128. $\log_{\cos x} \sin x + 4 \log_{\sin x} \cos x = 4$.

R. Este necesar să avem concomitent $\sin x > 0$ și $\sin x \neq 1$, $\cos x > 0$ și $\cos x \neq 1$, adică $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Apoi, ținînd seamă că $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ și notînd $\log_{\sin x} \cos x = y$, ecuația dată se transformă în $(2y-1)^2 = 0$, de unde rezultă imediat $\log_{\sin x} \cos x = \frac{1}{2}$ și $\log_{\cos x} \sin x = 2$. Dar aceste ecuații sînt echivalente respectiv cu $\sqrt{\sin x} = \cos x$ și $\sin x = \cos^2 x$, aceste două ecuații avînd aceleași soluții

$$x = \arcsin \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + k\pi, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad k \in Z.$$

4.129. $(\cos x + \sin x)^n + (\cos x - \sin x)^n = 0$.

R. Transformînd sumele din paranteze în produse, ecuația dată devine

$$\cos^n\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^n\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0, \tag{1}$$

de unde rezultă că dacă $n = 2k$, ecuația nu are nici o soluție, iar dacă $n = 2k+1$ ecuația are o singură soluție dată de $\operatorname{tg}^n\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, adică $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

Altfel. Dacă notăm $\cos x + \sin x = u$ și $\cos x - \sin x = v$, obținem sistemul

$$u^2 + v^2 = 2,\ u^n + v^n = 0, \tag{2}$$

Din ecuația a doua rezultă $u = -v\sqrt[n]{1}$ și luînd în considerare numai cazul $u = -v$, soluțiile sistemului (2) sînt $u = \pm 1$, $v = \mp 1$, de unde și ecuațiile

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x &= \pm 1, \\ \cos x - \sin x &= \mp 1, \end{aligned} \tag{3}$$

rezolvarea concomitentă a ecuațiilor (3) conducînd la soluția generală $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, care este echivalentă cu aceea obținută prin metoda anterioară.

4.130. $\sin^n x + \dfrac{1}{\cos^m x} = \cos^n x + \dfrac{1}{\sin^m x}$.

R. Observîndu-se că soluțiile de forma $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ și $x = k\pi$ nu sînt acceptabile, ecuația dată se poate scrie sub forma echivalentă

$$\sin^n x - \cos^n x = \frac{\cos^m x - \sin^m x}{\cos^m x \sin^m x},$$

soluția unică $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ fiind dată de ecuația $\sin x - \cos x = 0$, $k \in Z$.

4.131. Să se rezolve ecuațiile

$$\sin x + \sin(x + r) + \sin(x + 2r) + \ldots + \sin[x + (n-1)r] = 0.$$

$$\cos x + \cos(x + r) + \cos(x + 2r) + \ldots + \cos[x + (n-1)r] = 0,$$

R. Se aplică formulele de însumare a sinusurilor și cosinusurilor arcelor în progresie aritmetică și anume:

$$S_s = \sin a + \lambda \sin(a + r) + \lambda^2 \sin(a + 2r) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda^{n-1} \sin[a + (n-1)r] =$$
$$= \frac{\lambda^2 \sin[a + (n-1)r] - \lambda[\sin(a + nr) + \sin(a - r)] + \sin a}{\lambda^2 - 2\lambda \cos r + 1}$$

și

$$S_c = \cos a + \lambda \cos(a + r) + \lambda^2 \cos(a + 2r) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda^{n+1} \cos[a + (n-1)r] =$$
$$= \frac{\lambda^2 \cos[a + (n-1)r] - \lambda[\cos(a + nr) + \cos(a - r)] + \cos a}{\lambda^2 - 2\lambda \cos r + 1}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care, luîndu-se $\lambda = 1$, ecuațiile din enunț se transformă în

$$\frac{\sin\frac{nr}{2}\sin\left(x+\frac{n-1}{2}r\right)}{\sin\frac{r}{2}}=0 \tag{1}$$

și

$$\frac{\sin\frac{nr}{2}\cos\left(x+\frac{n-1}{2}r\right)}{\sin\frac{r}{2}}=0. \tag{2}$$

Ecuația (1) este echivalentă cu

$$\sin\frac{nr}{2}=0 \text{ și } \sin\left(x+\frac{n-1}{2}r\right)=0. \tag{1'}$$

Ecuația $\sin\frac{nr}{2}=0$ nu conține pe x, ci dă doar o condiție pentru n și r și anume $\frac{r}{2}=\frac{k}{n}\pi$. În această situație se disting două cazuri:

a) $\frac{k}{n}\notin N$, ceea ce conduce la $\sin\frac{r}{2}\neq 0$;

b) $\frac{k}{n}\in N$, deci $k=n\,n'\,(n'\in N)$ și $\sin\frac{r}{2}=\sin k\pi=0$, cînd $\lim\limits_{\frac{r}{2}\to k\pi}\frac{\sin\frac{nr}{2}}{\sin\frac{r}{2}}=$ $=\pm n$, iar $\sin\left(x+\frac{n-1}{2}r\right)=\mp\sin x$, după paritatea lui n și n'. Ecuația respectivă se reduce la $\sin x=0$ și deci $x=k\pi$. Dealtfel, în acest caz avem $r=2n'\pi$, de unde $\sin(x+r)=\sin(x+2r)=\ldots=\sin[x+(n-1)r]=\sin x$ și ecuația dată devine $n\sin x=0$.

Dacă $\sin\frac{nr}{2}\neq 0$, rămîne $\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\right).=0$, din care rezultă imediat $x=$ $=k\pi-\frac{n-1}{2}r$, $k\in Z$ și $n\in N$. În acest caz ecuația (2) se reduce la $\cos\left(x+\frac{n-1}{2}r\right)=0$ cu soluția $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi-\frac{n-1}{2}r$, $k\in Z$.

4.132. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}(x+1)=\frac{\pi}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Luînd tangenta arcelor din ambii membri ecuația dată se transformă în

$$\frac{(x+2)-(x+1)}{1+(x+2)(x+1)}=1, \qquad (1)$$

și efectuînd calculele în (1), se obțin $x_1=-1$, $x_2=-2$.

4.133. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{arctg}(x-1)+\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}(x+1)=\operatorname{arctg} 3x.$$

R. Se iau tangentele în ambii membri ai ecuației și se obține

$$\frac{(x-1)+x+(x+1)-x(x^2-1)}{1-x(x-1)-x(x+1)-(x^2-1)}=3x \qquad (1)$$

sau, efectuînd calculele în (1), rezultă ecuația $x(4x^2-1)=0$ cu $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\frac{1}{2}$.

Altfel. Se poate scrie și astfel:

$$\operatorname{arctg}(x-1)+\operatorname{arctg}(x+1)=\operatorname{arctg} 3x-\operatorname{arctg} x$$

și apoi se iau tangentele în ambii membri ai ecuației.

Să se rezolve inecuațiile:

4.134. $|\sin x|\geqslant|\cos x|$.

R. Mai întîi se explicitează modulii.

4.135. $\dfrac{2\sin^2 x}{2\sin^2 x-1}>-1$.

R. Se trece totul în partea stîngă a inecuației.

4.136. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}>\dfrac{\operatorname{tg} x-2}{\operatorname{tg} x+2}$.

R. Se poate lua ca necunoscută $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$.

4.137. $\dfrac{1}{\sin^2 x}-(\sqrt{3}+1)\operatorname{ctg} x+\sqrt{3}-1>0$.

R. Se ia ca necunoscută $\operatorname{ctg} x$; rezultă inecuațiile elementare $\operatorname{ctg} x<1$ și $\operatorname{ctg} x>\sqrt{3}$.

4.138. $\cos x\,(1-2\sin x)<0.$

R. $\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$ și $\frac{5\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z.$

4.139. $4\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x>4.$

R. Se poate trata mai întîi ca o ecuație omogenă, observînd că membrul al doilea se poate scrie sub forma $4(\cos^2 x+\sin^2 x)$.

4.140. $\frac{2\cos 2x-1}{1+2\cos 2x}<0.$

R. Se poate forma un tabel pentru determinarea semnului expresiei din partea stîngă a inecuației (a se vedea exemplul 3.2).

4.141. $\frac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+1}>0.$

R. Inecuația se transformă în $\frac{1-t}{1+t}>0$, unde $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; soluția generală este formată din mulțimea infinită de intervale

$$\left((2k-1)\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right),\ k\in Z.$$

4.142. $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x\leqslant 1.$

R. Se poate lua ca necunoscută $\operatorname{tg} x=t$.

4.143. $\operatorname{tg} x>\operatorname{tg}\frac{x}{3}.$

R. Se va considera mai întîi un interval egal cu perioada 3π a funcțiilor din ambii membri ai inecuației.

4.144. $\frac{\sin\frac{2x}{3}}{\cos x\cos\frac{x}{3}}>0.$

R. Se procedează ca la exercițiul 3.2, rezultînd $0<x<\frac{\pi}{2}$ și $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}$.

4.145. $\sin 2x \operatorname{tg} 2x > \dfrac{6\operatorname{tg}^2 x}{4-\operatorname{tg}^2 x}$.

R. Se poate lua ca necunoscută $\operatorname{tg} x = t$.

4.146. $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) > \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

4.147. $\sqrt{2\sin^2 x - 1} < 1$

R. Se vor scrie mai întîi condițiile de existență

$$0 \leqslant 2\sin^2 x - 1 < 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Partea a doua

DISCUȚIA ECUAȚIILOR TRIGONOMETRICE

5. DISCUȚIA ECUAȚIILOR TRIGONOMETRICE

5.1. Prezentare

Problema discuției ecuațiilor trigonometrice, de regulă avînd un singur parametru real, se pune în principal la ecuații ce conțin ca necunoscută una din funcțiile sin x sau cos x, sau chiar o funcție de forma $f(\sin x, \cos x)$ și într-o mai mică măsură, ecuații ce conțin ca necunoscută pe tg x sau ctg x. Problemele cu privire la discuția ecuațiilor trigonometrice se pot grupa după cum urmează :

1° *Ecuații de gradul întîi în raport cu funcțiile circulare de forma*

$$\sin \alpha x = m,\ \cos \beta x = n,\ \operatorname{tg} \gamma x = p,\ \operatorname{ctg} \delta x = q, \tag{5.1}$$

unde α, β, γ, δ sînt elemente cunoscute, m, n, p, q parametri reali și x argumentul.

Ecuațiile $\sin \alpha x = m$, $\cos \beta x = n$ au soluții dacă $|m| \leqslant 1$, respectiv $|n| \leqslant 1$. Pentru p și q nu se pun nici un fel de condiții, parametrii respectivi putînd avea orice valori reale.

2° *Ecuații de gradul al doilea în raport cu* sin x *sau* cos x :

$$f(\sin x, m) = 0,\ f(\cos x, n) = 0. \tag{5.2}$$

În această situație distingem două cazuri :

1) Parametrii m și n pot fi explicitați (separați de restul termenilor ecuației).

2) Parametrii m și n nu sînt explicitați (separați de restul termenilor ecuației).

În cazul 1 ecuațiile (5.2) pot avea forma generală

$$\begin{aligned} a \sin^2 x + b \sin x + c &= m, \\ a \cos^2 x + b \cos x + c &= n. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru uşurinţa calculului în prima ecuaţie notăm $\sin x = X$, aceasta devenind

$$X^2 + bX + c - m = 0, \quad a \neq 0 \text{ şi } X \in [-1, 1]. \tag{5.4}$$

Discuţia ecuaţiei (5.4) se poate face prin mai multe metode.

a) Fie X_1 şi X_2 rădăcinile ecuaţiei (5.4). Pentru ca ambele rădăcini să fie acceptabile şi distincte, adică să aparţină intervalului $[-1, 1]$, este necesar ca parametrul m să verifice următorul sistem de inecuaţii (în raport cu m) :

$$\Delta > 0, \; af(-1) \geqslant 0, \; af(1) \geqslant 0, \; -1 < \frac{-b}{2a} < 1. \tag{5.5}$$

Dacă însă numai una din rădăcinile ecuaţiei (5.4) convine problemei, adică aparţine intervalului $[-1, 1]$, atunci parametrul m trebuie să verifice inecuaţiile

$$f(-1) \cdot f(1) < 0, \; \Delta > 0 \tag{5.6}$$

cazul de egalitate trebuind a fi studiat separat.

De menţionat faptul că este necesar a se examina şi cazul în care $\Delta = 0$, deoarece este posibil ca pentru valorile lui m care verifică ecuaţia $\Delta = 0$ să corespundă o rădăcină dublă $X_1 = X_2$ a ecuaţiei (5.4) şi deci o soluţie unică a ecuaţiei (5.3).

b) Se separă m din ecuaţia (5.4) şi se notează cu

$$y_1 = aX^2 + bX + c \text{ şi } y_2 = m.$$

Se reprezintă grafic parabola $y_1 = f(X)$ şi se limitează graficul respectiv de dreptele $X = -1$ şi $X = 1$. Ordonatele punctelor de intersecţie ale graficului parabolei cu dreapta $y_2 = m$ dau valorile lui m prin care ecuaţia (5.4) are una sau două rădăcini acceptabile. Abscisele α_1, α_2 ale punctelor de interecţie respective conduc la ecuaţiile elementare $\sin x = \alpha_1$ şi $\sin x = \alpha_2$. Dacă dreapta $y_2 = m$ întâlneşte numai într-un singur punct (simplu sau dublu) graficul limitat al parabolei y_1, atunci există o singură rădăcină acceptabilă a ecuaţiei (5.4) şi deci o sigură soluţie a ecuaţiei, dată de $\sin x = \alpha_1$.

c) Se rezolvă ecuaţia algebrică (5.4), determinându-se X_1, X_2; pentru ca ambele rădăcini să fie însă acceptabile şi distincte pentru ecuaţia (5.3), este necesar ca parametrul m să verifice sistemele de inecuaţii

$$\Delta > 0, \; -1 \leqslant X_1 \leqslant 1, \; -1 \leqslant X_2 \leqslant 1. \tag{5.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie A şi B respectiv soluţiile celor două sisteme din (5.7) verificate de m. Pentru ca ecuaţia (5.3) să aibă o singură soluţie acceptabilă este însă necesar ca m să aparţină mulţimei $C = A \setminus B$ la care trebuie adăugate valorile lui m pentru care $\Delta = 0$.

Tot în cazul 1 ecuaţiile de tip (5.2) se mai pot prezenta sub o formă în care parametrul m figurează la gradul întîi, dar este afectat pe lîngă $\sin^2 x$ sau $\sin x$, sau chiar pe lîngă amîndouă acestea, adică de forma

$$\begin{aligned} ma \sin^2 x + b \sin x + c = 0, \\ a \sin^2 x + bm \sin x + c = 0, \end{aligned} \tag{5.8}$$

sau încă $ma \sin^2 x + b \sin x + cm = 0$, etc., considerîndu-se asemănător şi ecuaţii în $\cos x$. Şi în această situaţie parametrul m este separabil, deci se poate aplica pentru discuţia ecuaţiei respective oricare din cele trei metode de la 2°. Deosebirea constă doar în aceea că graficul corespunzător funcţiei $y = f(X)$ nu mai este o parabolă ci o curbă oarecare, discuţia conducîndu-se ca la 2°, b).

De remarcat doar, că în cazul ecuaţiilor de forma (5.8) metoda grafică de la 2°, b) prezintă unele dificultăţi de rezolvare. De aceea, în astfel de situaţii se va observa dacă nu sînt mai indicate metodele 2°, a) şi 2°, c).

În cazul 2, adică atunci cînd parametrii m sau n nu sînt explicitaţi, ecuaţiile respective se prezintă sub forma

$$f(m \sin x) = 0 \text{ sau } f(n \cos x) = 0,$$

unde atît necunoscutele $\sin x$ şi $\cos x$ cît şi parametrii m sau n figurează neapărat şi la gradul al doilea.

De exemplu :

$$\begin{aligned} (m^2 + 1) \sin^2 x + m \sin x + c = 0, \\ (2m - 1) \cos^2 x - \cos x + m^2 - 2 = 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

şi alte forme asemănătoare. Înlocuind $\sin x$ sau $\cos x$ cu $X \in [-1,1]$, ecuaţiile trigonometrice (5.9) se transformă în ecuaţii algebrice

$$\begin{aligned} (m^2 + 1) X^2 + mX + c = 0, \\ (2m - 1) X^2 - X + m^2 - 2 = 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru discuţia ecuaţiilor de tip (5.10) se procedează astfel :

a) Se calculează mai întîi discriminantul Δ al ecuaţiei respective. Dacă Δ este un pătrat perfect, se află rădăcinile X_1 şi X_2 şi se pun condiţiile

$$|X_1| \leqslant 1, \ |X_2| \leqslant 1. \tag{5.11}$$

Dacă m verifică ambele sisteme de inecuaţii din (5.11), atunci ecuaţiile de forma (5.9) au două soluţii distincte; dacă numai unul din cele două sisteme este verificat de m, atunci ecuaţiile de forma (5.9) au o singură soluţie acceptabilă.

Dacă Δ nu este un pătrat perfect, se aplică metoda a) de la 2°, aplicarea metodei c) fiind, de regulă, destul de dificilă.

3° *Ecuaţii de gradul al treilea în raport cu* sin x *sau* cos x, *conţinînd un singur parametru , de forma*

$$F(\sin x, m) = 0 \text{ sau } F(\cos x, m) = 0 \tag{5.12}$$

Se disting două cazuri :

1) Parametrii m şi n pot fi explicitaţi din ecuaţiile (5.12).

2) Parametrii m şi n nu sînt explicitaţi.

În cazul 1) pot exista următoarele situaţii :

1. Ecuaţiile (5.12) după explicitarea lui m iau forma

$$f(\sin x) = m \text{ sau } f(\cos x) = n. \tag{5.13}$$

Se poate proceda în două feluri :

a) Se înlocuieşte sin x, respectiv cos x prin $X \in [-1, 1]$ şi se reprezintă graficul funcţiei algebrice $y = f(X)$, care se limitează de dreptele $X = -1$ şi $X = 1$. Punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $y = f(X)$ cu dreapta $y = m$ dau numărul şi natura rădăcinilor ecuaţiei respective de tip (5.13).

Cînd funcţiile $f(\sin x)$ şi $f(\cos x)$ nu au forme prea complicate, acestea se pot reprezenta grafic ca funcţii trigonometrice, luîndu-se ca interval de studiu perioada ce rezultă din ordinul de multiplicitate al argumentului x. Trebuie însă avut în vedere în acest caz că intersecţia graficului funcţiei $y = f(\sin x)$ sau $y = f(\cos x)$ cu dreapta $y = m$ dă un număr dublu de puncte de intersecţie decît în cazul reprezentării funcţiei algebrice $y = f(X)$; de aceea — în această situaţie — punctele de intersecţie, care sînt simetrice de regulă două cîte două faţă de 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, vor constitui cîte o soluţie a ecuaţiilor de forma (5.12).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru stabilirea numărului rădăcinilor oricăreia din ecuațiile de tip (5.12). se poate folosi și teorema lui Rolle.

2. Ecuațiile de tip (5.12) nu iau forma (5.13) prin explicitarea lui m, ci una din formele

$$\frac{\varphi(\sin x)}{\psi(\sin x)} = m, \quad \frac{\varphi(\cos x)}{\psi(\cos x)} = n. \tag{5.14}$$

În acest caz se înlocuiește $\sin x$ sau $\cos x$ prin $X \in [-1, 1]$; se reprezintă grafic funcția

$$y = \frac{\varphi_1(X)}{\psi_1(X)}$$

și se limitează graficul de dreptele $X = -1$ și $X = 1$. Punctele de intersecție ale graficului astfel limitat cu dreapta $y = m$ indică numărul și natura soluțiilor ecuației studiate.

În cazul 2) în care parametrul m nu este explicitat, m figurînd la un grad $\geqslant 2$, discuția ecuației nu este posibilă decît cu ajutorul teoremei lui Rolle.

4° *Ecuații care conțin ca necunoscută o funcție* $\varphi(\sin \alpha x, \cos \beta x)$ *în care, de regulă,* $\sin x$ *și* $\cos x$ *figurează la gradul întîi, forma ecuației respective fiind*

$$F(\varphi, m) = 0, \tag{5.15}$$

unde funcția φ *are semnificația de mai înainte.*

Discuția unor asemenea ecuații se face în felul următor :

1. Se află extremele funcției $\varphi(\sin \alpha x, \cos \beta x)$ cu ajutorul derivatelor sau printr-o altă metodă mai rapidă.

2. Se înlocuiește în ecuația de discutat $\varphi(\sin \alpha x, \cos \beta x)$ prin $X \in [\min \varphi, \max \varphi]$, aplicîndu-se apoi, după caz, una din metodele arătate la punctele 1°—3°.

5.2. Exemple de discuții de ecuații trigonometrice cu un singur parametru, rezolvate complet

Ecuații de forma (5.2)

5.1. Să se rezolve și să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = m,$$

unde m este un parametru real.

Scanned with OKEN Scanner

R. Înlocuind $\sqrt{3}$ prin $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ ecuația dată devine

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{m}{2}$$

și ținînd seamă de condițiile de la (1.4), pentru ca ecuația dată să aibă soluții trebuie ca

$$\left|\frac{m}{2}\right|\leqslant 1\Rightarrow m\in[-2,2],$$

soluțiile fiind de forma $x_1=\pm\arccos\frac{m}{2}+\frac{\pi}{3}+2k_1\pi$ pentru $m\in[0,2]$ și $x_2=$ $=\pm\arccos\left|\frac{m}{2}\right|+\frac{\pi}{3}+(2k_2+1)\,\pi$ pentru $m\in[-2,0)$, $k_{1,2}\in Z$.

Ecuații de forma (5.3)

5.2. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$2\cos^2 x-\cos x-(1+m)=0,$$

unde m este un parametru real.

R. Aducem ecuația la forma (5.4), punînd $\cos x=X\in[-1,1]$; avem

$$2X^2-X-(1+m)=0. \tag{1}$$

Aplicăm metoda de la 5.2°, a și avem

$$\Delta=1+8(1+m)=9+8m,\quad -\frac{b}{2a}=\frac{1}{4}.$$

$$f(-1)=2-m;\ f(1)=-m,$$

Ținînd seamă de condițiile (5.5), pentru ca ecuația (1) să aibă două soluții distincte este necesar ca m să verifice concomitent inecuațiile

adică
$$\Delta>0,\ af(-1)\geqslant 0,\ af(1)\geqslant 0,\ -1<-\frac{b}{2a}<1, \tag{α}$$

$$9+8m>0,\ 2(2-m)\geqslant 0,\ 2(-m)\geqslant 0, \tag{2}$$

ultima inegalitate din (α) fiind evidentă pentru orice $m\in R$. Rezolvînd sistemul de inecuații (2), rezultă $m\in\left(-\frac{9}{8},0\right]$.

Ca ecuația să aibă o singură soluție acceptabilă este necesar ca m să verifice inegalitatea $f(-1)\cdot f(1)<0$, adică $(2-m)\ (-m)<0\Rightarrow m\in(0,2)$. Din $f(-1)\cdot f(1)=0$ rezultă $m_1=0$, $m=2$; pentru $m=0$ ecuația dată are două soluții: $\cos x=1$ și $\cos x=-\frac{1}{2}$,

așa cum a rezultat mai înainte, iar pentru $m = 2$ ecuația respectivă are o singură soluție acceptabilă $\cos x = -1$.

Din $\Delta = 0$, rezultă $m = -\frac{9}{8}$, valoarea pentru care $X_1 = X_2 = \frac{1}{4}$.

În consecință, ecuația are o singură soluție acceptabilă cuprinsă în intervalul $[-1, 1]$, pentru $m \in (0, 2] \cup \left\{-\frac{9}{8}\right\}$.

Altfel. Se aplică metoda de la 5.2°, *b* și separînd pe m din ecuația (1), avem

$$2X^2 - X - 1 = m,$$

Reprezentăm grafic parabola $y = 2X^2 - X - 1$ și dreapta $y = m$, soluțiile rezultînd din intersectarea graficelor (v. fig. 5.2, *a*), adică :

— pentru $m \in \left(-\infty, -\frac{9}{8}\right) \cup (2, \infty)$ ecuația nu are nici o soluție,

— pentru $m \in \left(-\frac{9}{8}, 0\right]$ ecuația are două soluții,

— pentru $m \in (0, 2] \cup \left\{-\frac{9}{8}\right\}$ ecuația are o singură soluție.

În cazul de față, se poate reprezenta grafic însăși funcția $y = 2\cos^2 x - \cos x - 1$, deoarece studiul acesteia nu este complicat. Din tabloul

x	0		α_1	$\pi/2$		$2\pi/3$	π	$4\pi/3$		$3\pi/2$	α_2		2π
y'	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
y	0	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	0

rezultă graficul din fig. 5.2, *b*. Din studiul graficului rezultă următoarele :

— pentru $m \in \left(-\infty, -\frac{9}{8}\right) \cup (2, \infty)$ ecuația nu are soluții ;

— pentru $m \in \left(-\frac{9}{8}, 0\right]$ ecuația are două soluții de forma

$$x_1 = \pm\beta + 2k_1\pi \text{ și } x_2 = \pi \pm \gamma + 2k_2\pi,\ k_{1,2} \in Z;$$

— pentru $m \in (0, 2]$ ecuația are o soluție de forma

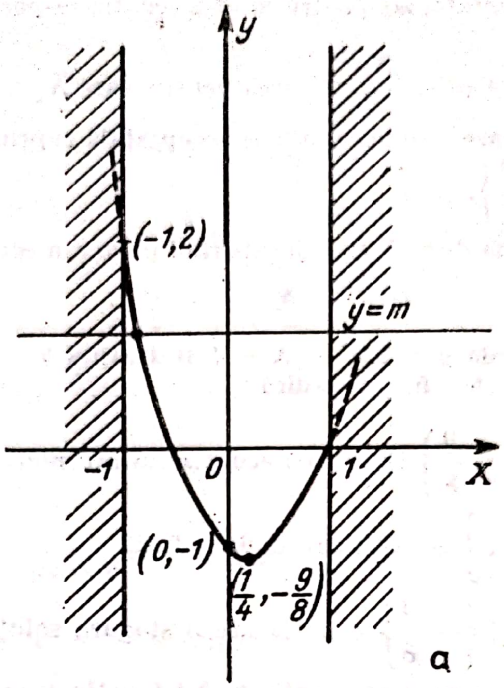
$$x = \pi \pm \gamma + 2k\pi,\ k \in Z;$$

— pentru $m = -\frac{9}{8}$ ecuația are o soluție de forma

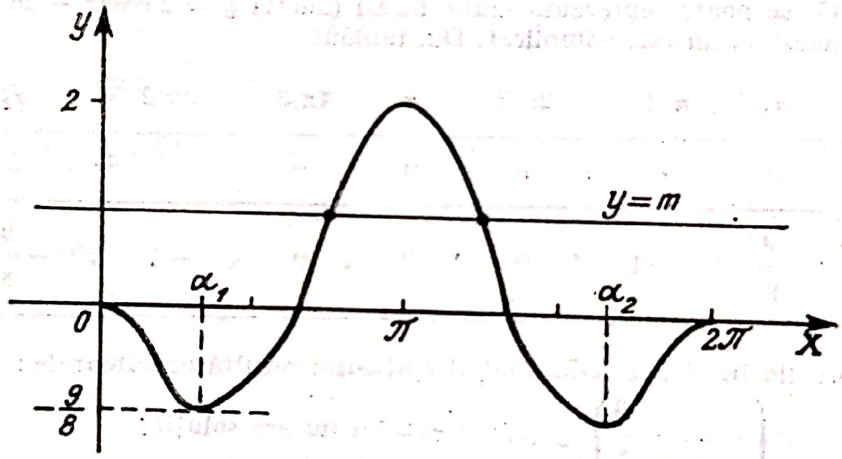
$$x = \pm\alpha_1\ (\alpha_2) + 2k\pi,\ k \in Z,$$

adică aceleași rezultate obținute prin reprezentarea grafică a parabolei $y = 2X^2 - X - 1$.

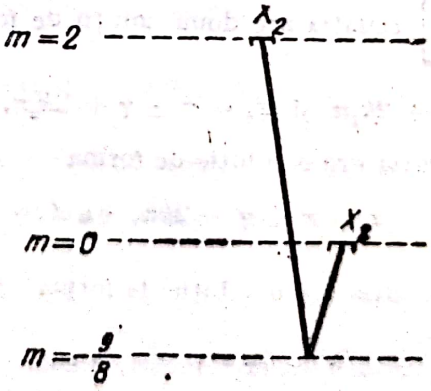
Scanned with OKEN Scanner



a



b



c

Fig. 5.2

De remarcat faptul că, în cazul reprezentării funcției $y = 2\cos^2 x - \cos x - 1$, dreapta $y = m$ intîlnește graficul respectiv într-un număr dublu de puncte, simetrice două cîte două față de extremitățile arcelor $0, \pi, 2\pi$. Fiecărei perechi de puncte de intersecție îi corespunde însă o singură soluție, dat fiind că în intervalul de studiu $[0, 2\pi]$ funcția cosinus are cîte două valori simetrice față de extremitățile arcelor $0, \pi, 2\pi$.

Altfel. Aplicăm metoda 5.2°, c și rezolvînd ecuația (1), obținem

$$X_1 = \frac{1 + \sqrt{9 + 8m}}{4}, \quad X_2 = \frac{1 - \sqrt{9 + 8m}}{4}.$$

Avem de rezolvat sistemele de inecuații

$$-1 \leqslant \frac{1 + \sqrt{9 + 8m}}{4} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \frac{1 - \sqrt{9 + 8m}}{4} \leqslant 1 \tag{1'}$$

sau

$$-5 \leqslant \sqrt{9 + 8m} \leqslant 3; \quad -3 \leqslant \sqrt{9 + 8m} \leqslant 5, \quad 9 + 8m > 0.$$

Soluțiile sistemelor sînt arătate în fig. 5.2, *c*, din care rezultă următoarele:

— pentru $m \in \left(-\frac{9}{8}, 0\right]$ ecuația are două soluții;

— pentru $m \in (0, 2] \cup \left\{-\frac{9}{8}\right\}$ ecuația are o singură soluție.

Ecuații de forma (5.8)

5.3. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$m \sin^2 x - 2(m - 2) \sin x + m + 2 = 0;$$

cazuri particulare $m = 0$, $m = 1/2$, $m = 2/3$.

R. Aducem ecuația la forma (5.4), punînd $\sin x = X \in [-1, 1]$ și avem

$$mX^2 - 2(m - 2)X + m + 2 = 0. \tag{1}$$

Folosim prima metodă de la 5.1, calculînd

$$\Delta = (m - 2)^2 - m(m + 2) = 2(-3m + 2),$$

$$a \cdot f(-1) = 2m(2m - 1); \quad a \cdot f(1) = 6m; \quad -\frac{b}{2a} = \frac{m - 2}{m}.$$

Ecuația (1) are două rădăcini acceptabile și distincte, dacă m verifică inecuațiile

$$2(-3m + 2) > 0, \quad 2m(2m - 1) \geqslant 0, \quad 6m \geqslant 0, \quad \left|\frac{m - 2}{m}\right| < 1,$$

de unde rezultă că $m \in \emptyset$. (Ecuația (1) are o singură rădăcină în intervalul $[-1,1]$, dacă m verifică inegalitatea $f(-1) \cdot f(1) < 0$, sau $2m(2m - 1) \cdot 6m < 0$, de unde rezultă că

Scanned with OKEN Scanner

$m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ (se vor studia și cazurile $\Delta = 0$ și $f(-1)\,f(1)=0$). Cazul particular $m = 0$ are însă sens, cum se va arăta în continuare.

Altfel. Aplicăm metoda *b*) de la 5.1,2° și explicitînd pe m, obținem

$$m = -2\,\frac{2X+1}{(X-1)^2}.$$

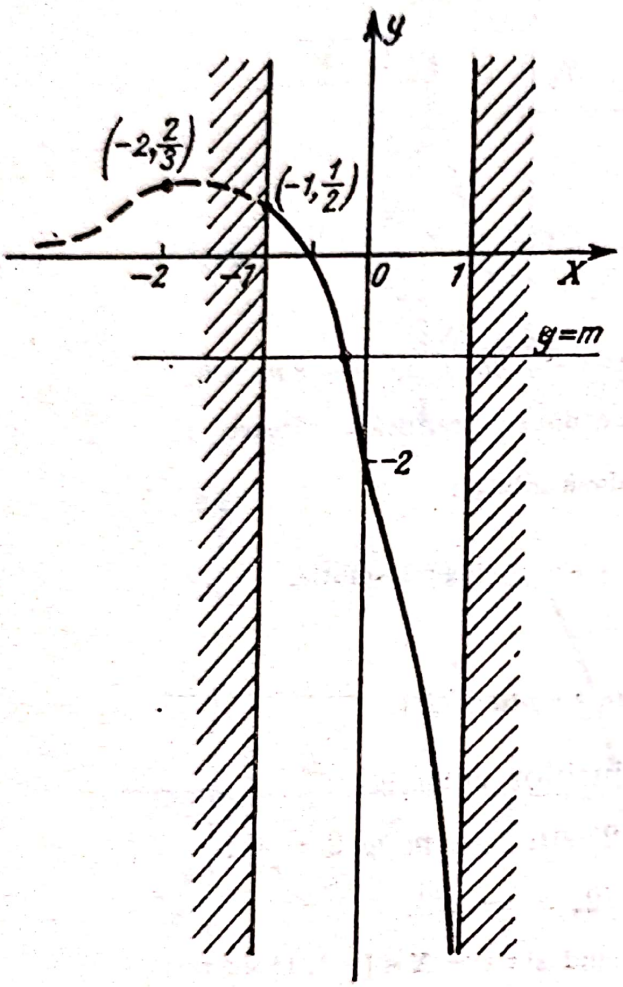


Fig. 5.3

Graficul funcției $y = -2\,\frac{2X+1}{(X-1)^2}$ este dat în fig. 5.3, din care rezultă că în intervalul $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ ecuația respectivă are o singură soluție.

În cazurile particulare:

$m = 0$, rezultă $X = -\frac{1}{2}$ și deci $\sin x = -\frac{1}{2}$ cu $x = (-1)^{k+1}\,\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$ (cealaltă rădăcină $X_2 = \infty$ a ecuației (1) nu furnizează nici o soluție pentru ecuația dată);

$m = \frac{1}{2}$, $X = -1$, $\sin x = -1$,

$$x = (-1)^{k+1}\,\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z;$$

$m = \frac{2}{3}$, ecuația propusă nu are soluții deoarece $X_1 = X_2 = -2$.

Aplicarea metodei c) de la 5.1,2° este mai dificilă, avînd de rezolvat sistemele de inecuații iraționale

$$-1 \leqslant \frac{m-2-\sqrt{2(-3m+2)}}{m} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \frac{m-2+\sqrt{2(-3m+2)}}{m} \leqslant 1.$$

Pentru valorile lui m care verifică concomitent ambele sisteme de inecuații, se obțin două soluții ale ecuației problemei 5.3, iar pentru valorile lui m care verifică numai un singur sistem de inecuații, există o singură soluție.

Ecuații de forma (5.9)

5.4. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$(2m^2 + m - 1)\cos^2 x - (2m+1)\cos x + 1 = 0.$$

R. Notăm $\cos x = X \in [-1, 1]$ și ecuația devine

$$(2m^2 + m - 1)\,X^2 - (2m + 1)\,X + 1 = 0. \qquad (1)$$

Deoarece parametrul m nu poate fi explicitat din ecuația (1), metoda grafică de la 5.1,2°nu mai este aplicabilă. De asemenea, nici metoda c) nu este indicată, întrucît, Δ nefiind un pătrat perfect, X_1 și X_2 au forme complicate și rezolvarea sistemelor $|X_1| \leqslant 1$, $|X_2| \leqslant 1$ conduce la calcule dificile.

Astfel, în cazul de față se aplică metoda a) de la 5.1,2°. Avem

$$\Delta = (2m + 1)^2 - 4\,(2m^2 + m - 1) = -4m^2 + 5,$$

$$f(-1) = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m + 1), \quad f(1) = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m - 1),$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2m + 1}{2\,(2m^2 + m - 1)}.$$

Pentru ca ecuația (1) să aibă două rădăcini distincte acceptabile, cuprinse în intervalul $[-1, 1]$, este necesar ca m să verifice inecuațiile

$$-4m^2 + 5 > 0, \quad (2m^2 + m - 1)\cdot 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m + 1) \geqslant 0,$$

$$(2m^2 + m - 1)\cdot 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m - 1) \geqslant 0, \quad \left|\frac{2m + 1}{2\,(2m^2 + m - 1)}\right| < 1,$$

ceea ce conduce la condiția $m \in \left[1, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Dacă m verifică doar inecuațiile

$$-4m^2 + 5 = 0, \quad 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m + 1)\cdot 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m - 1) < 0,$$

adică $m \in [-1, 1] \cup \left\{\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$, atunci ecuația (1) are o singură rădăcină acceptabilă, cuprinsă în intervalul $[-1, 1]$, deci ecuația dată are o singură soluție.

Ecuații de forma (5.13)

5.5. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\cos^3 x - 3\cos x - m = 0.$$

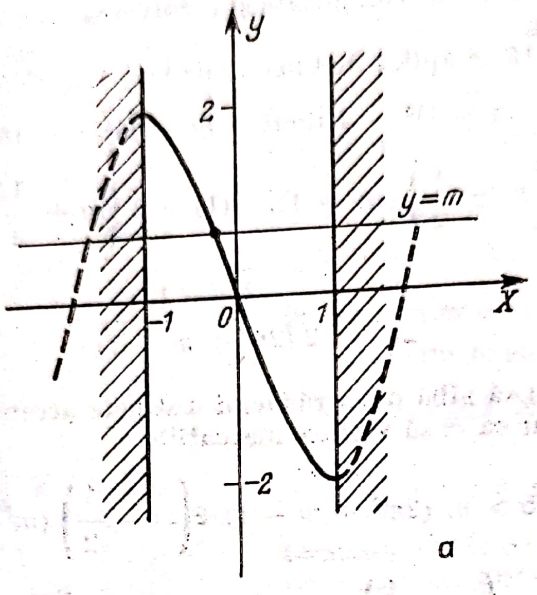
R. Înlocuim $\cos x$ prin $X \in [-1, 1]$ și ecuația propusă devine

$$X^3 - 3X - m = 0, \qquad (1)$$

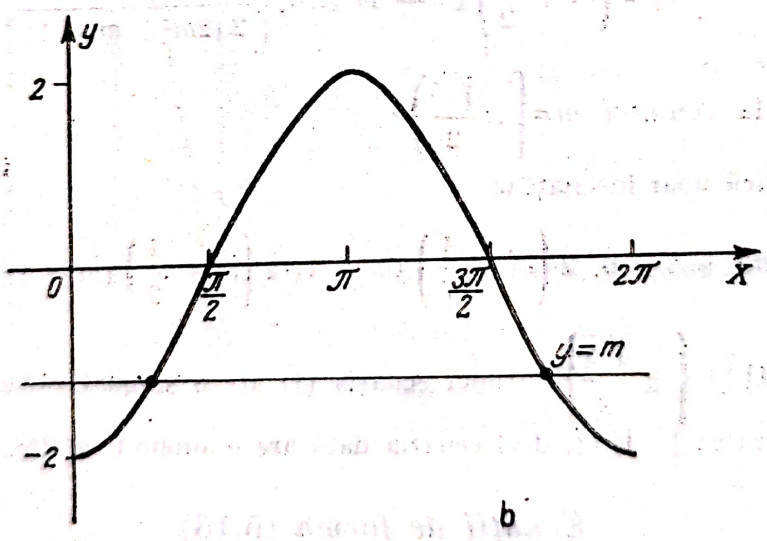
Separăm pe m din această ultimă ecuație și reprezentăm grafic funcția $y = X^3 - 3X$; limităm graficul acesteia cu dreptele $X = -1$, $X = +1$ (v. fig. 5.5, *a*). Punctele de

Scanned with OKEN Scanner

intersecție ale acestui grafic cu dreapta $y = m$ arată numărul și natura rădăcinilor ecuației (1), deci numărul și natura soluțiilor ecuației. Din analiza graficului dat în fig. 5.5,*a* rezultă că pentru $m \in [-2, 2]$ ecuația propusă are o singură soluție.



a



b

Fig. 5.5

În cazul ecuației date se poate studia direct funcția $y = \cos^3 x - 3\cos x$, al cărei grafic este dat în fig. 5.5,*b*, unde s-a considerat ca interval de studiu $[0, 2\pi]$. Din analiza acestuia, rezultă că ecuația dată are o singură soluție cînd $m \in [-2, 2]$, dreapta $y = m$ intersectînd graficul din fig. 5.5, *b* numai în două puncte simetrice față de π.

Folosind teorema lui Rolle, metoda *b*) de la 5.1,3° și tabloul următor, rezultă numărul și natura soluțiilor ecuației din enunț.

x	0	π	2π	concluzii
m \ $f(x)$	$-(2+m)$	$2-m$	$-(2+m)$	
	+	+	+	nici o soluție
-2	0	+	0	o soluție $x = 2k\pi$
	−	+	−	o soluție de forma $x = \pm\alpha + (2k+1)\pi$
2	−	0	−	o soluție $x = (2k+1)\pi$
	−	−	−	nici o soluție

Ecuații de forma (5.14)

5.6. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$m(\cos^3 x - 1) + \cos^3 x + 1 = 0.$$

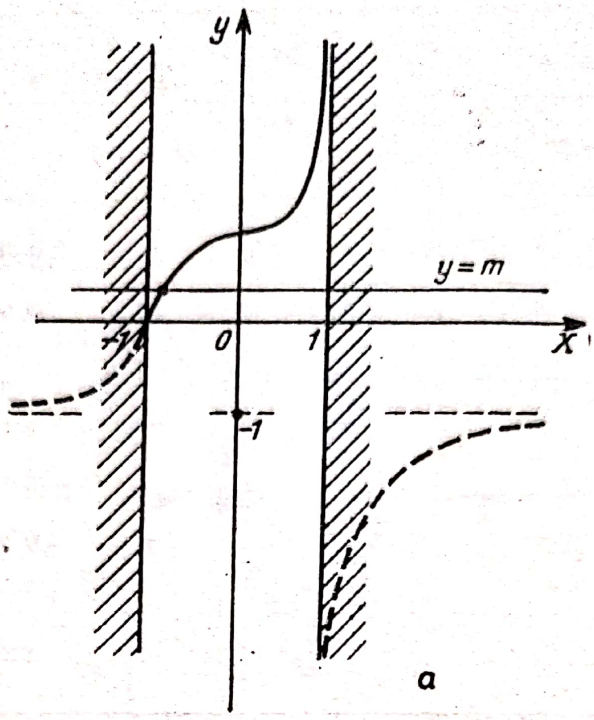
R. Se explicitează m și se notează $\cos x = X \in [-1, 1]$, obținîndu-se

$$\frac{1+X^3}{1-X^3} = m. \tag{1}$$

Se reprezintă grafic funcția $y = \dfrac{1+X^3}{1-X^3}$ și se limitează graficul de dreptele $X=-1$, $X=1$ (v. fig. 5.6, *a*). Intersecțiile dreptei $y=m$ cu graficul respectiv rezolvă problema. Astfel, din analiza graficului menționat rezultă că pentru $m \in [0, +\infty)$ ecuația are o singură soluție.

În loc de funcția $y = \dfrac{1+X^3}{1-X^3}$ se poate studia direct funcția $y = \dfrac{1+\cos^3 x}{1-\cos^3 x}$, graficul acesteia fiind dat în fig. 5,6, *b*, din care rezultă că în intervalul $[0, \infty)$ dreapta $y=m$ întîlnește graficul în două puncte simetrice în raport cu π și deci ecuația din enunț are o singură soluție de forma $x = \pm\alpha + (2k+1)\pi$.

Scanned with OKEN Scanner



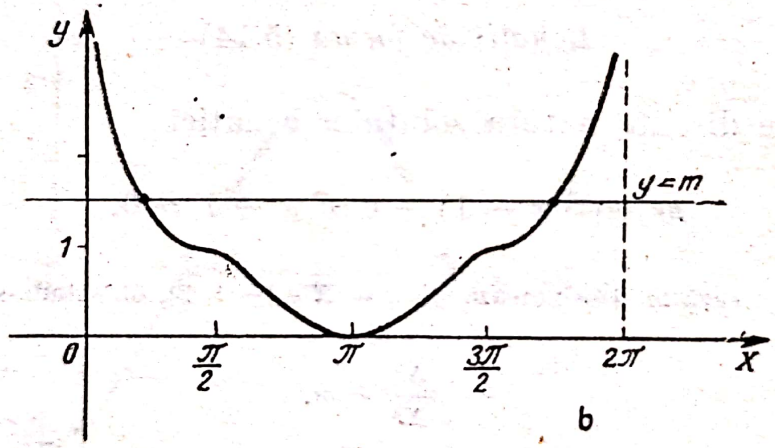


Fig. 5.6

Ecuații de forma (5.15)

5.7. Să se rezolve și să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\sin x \cos x - \sin x - \cos x + m = 0.$$

R. Se vor analiza și diferite cazuri particulare pentru parametrul real m. Notăm cu $X = \sin x + \cos x$. Se știe că $\max(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$ și că $\min(\sin x + \cos x) = -\sqrt{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seamă că $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$, rezultă, cu substituţia făcută anterior, că $\sin x \cos x = \frac{X^2 - 1}{2}$. Deci, ecuaţia devine

$$\frac{X^2 - 1}{2} - X + m = 0 \text{ sau } X^2 - 2X + 2m - 1 = 0. \qquad (1)$$

Ca ecuaţia (1) să aibă două rădăcini distincte acceptabile, m trebuie să verifice inecuaţiile

$$\Delta > 0,\ a \cdot f(-\sqrt{2}) \geqslant 0,\ a \cdot f(\sqrt{2}) \geqslant 0,\ \left| -\frac{b}{2a} \right| < \sqrt{2},$$

de unde rezultă $m \in \left[\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}, 1\right)$.

Pentru ca ecuaţia (1) să aibă o singură rădăcină cuprinsă în intervalul $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ este necesar ca m să verifice inegalitatea $f(-\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) < 0$, de unde rezultă

$$m \in \left[-\frac{2\sqrt{2} + 1}{2}, \frac{2\sqrt{2} - 1}{2}\right) \cup \{1\},$$

luîndu-se în considerare şi valorile lui m pentru care $\Delta = 0$, precum şi cazurile cînd m verifică şi egalitatea

$$f(-\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) = 0.$$

La aceleaşi rezultate ajungem dacă se reprezintă grafic funcţia $y = \frac{-X^2 + 2X + 1}{2}$ şi se limitează graficul de dreptele $X = -\sqrt{2}$, $X = \sqrt{2}$. Intersecţiile graficului (v.fig.5.7) cu dreapta $y = m$ dau soluţiile problemei, adică aceleaşi rezultate ca cele obţinute prin metoda anterioară.

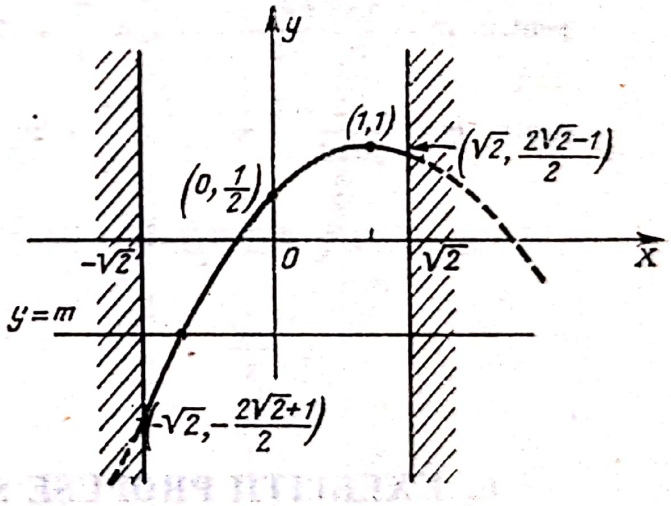


Fig. 5.7

Ecuaţia dată se poate rezolva, aducînd-o la o formă

$$2 \sin x \cos x - 2(\sin x + \cos x) + 2m = 0$$

sau

$$2 \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2\left[\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] + 2m = 0$$

sau, efectuînd toate calculele, se ajunge la forma

$$2 \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2m - 1 = 0.$$

rădăcinile acestei ecuații fiind

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}\pm 2\sqrt{1-m}}{2}.$$

Dacă m verifică inecuațiile

$$\left|\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{1-m}}{2}\right|\leqslant 1,\quad \left|\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{1-m}}{2}\right|\leqslant 1, \tag{1}$$

ecuația dată are două soluții, iar dacă m verifică o singură inecuație din (1), atunci ecuația propusă are o singură soluție. În ambele cazuri soluțiile sînt de forma

$$X=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}\pm 2\sqrt{1-m}}{2}+2k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in Z.$$

Se disting următoarele cazuri particulare:

— pentru $m=1\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi+\frac{\pi}{4}$;

— pentru $m=-\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$;

— pentru $m=\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\Rightarrow x_1=\frac{\pi}{4}+2k_1\pi$ și

$$x_2=\pm\arccos(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{4}+2k_2\pi,\ k_{1,2}\in Z.$$

6. EXERCIȚII PROPUSE SPRE REZOLVARE

6.1. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$3\cos^2x-2\cos x-1+m=0,\quad m\in R.$$

R. Este o ecuație de același tip cu aceea studiată în exercițiul 5.2. Aplicînd aceleași metode de discuție, rezultă în final următoarele:

— pentru $m\in[-4,\ 0)\cup\left\{\frac{4}{3}\right\}$ ecuația are o singură soluție;

— pentru $m \in \left[0, \frac{4}{3}\right)$ ecuația are două soluții distincte;

— pentru $m \in (-\infty, -4) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$ ecuația nu are soluții. A se vedea și fig. 6.1.

6.2. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$3 \sin^2 x - \sin x + 2 - m = 0,$$

unde m este un parametru real.

R. Se aplică metoda grafică; notăm $\sin x = X$ și separam pe m. Avem de reprezentat funcția $y = 3X^2 - X + 2$, $X \in [-1, 1]$, al cărei grafic este dat în fig. 6.2 și din care rezultă;

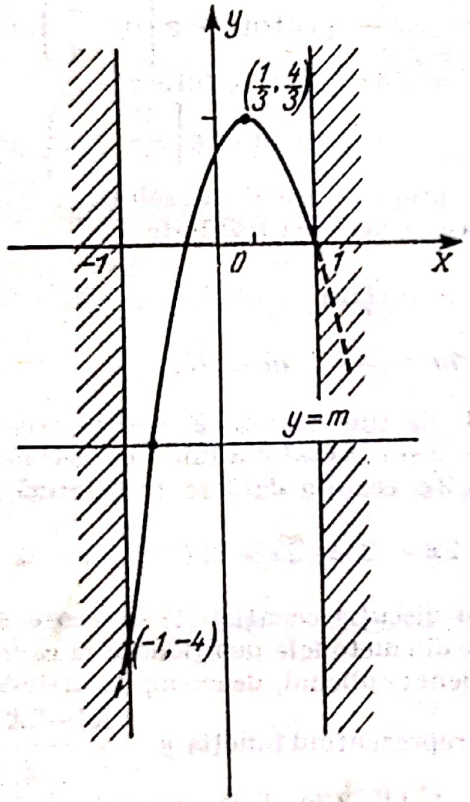


Fig. 6.1

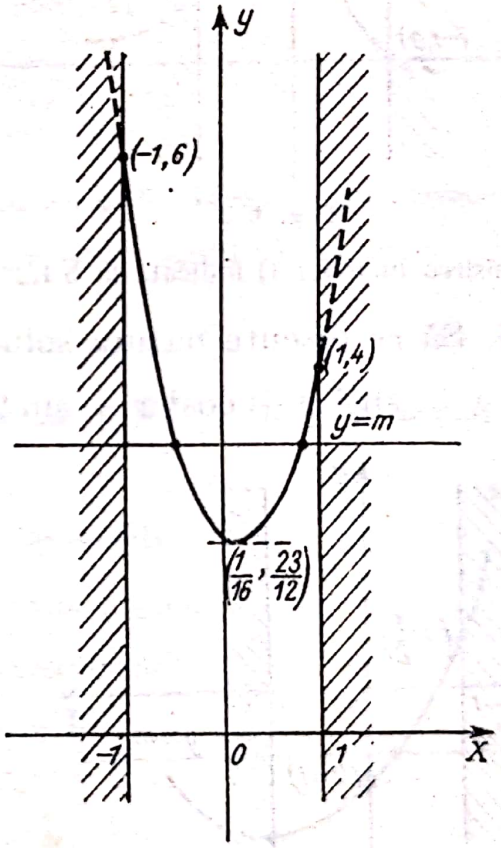


Fig. 6.2

— pentru $m \in \left(-\infty, \frac{23}{12}\right) \cup (6, +\infty)$ ecuația nu are soluții;

— pentru $m \in \left(\frac{23}{12}, 4\right]$ ecuația are două soluții;

— pentru $m \in (4, 6] \cup \left\{\frac{23}{12}\right\}$ ecuația are o soluție.

Scanned with OKEN Scanner

6.3. Să se discute natura soluţiilor ecuaţiei

$$3m\sin^2 x - \sin x - 1 = 0,\ m \in R.$$

R. Este o ecuaţie de acelaşi tip cu aceea studiată în exerciţiul 5.3.

Sînt mai indicate metodele a) şi b) prezentate la 5.1,2°, metoda c) fiind ceva mai dificilă.

Aplicăm metoda grafică; pentru aceasta separăm pe m şi avem $m = \dfrac{X+1}{3X^2}$, unde am notat $\sin x = X$.

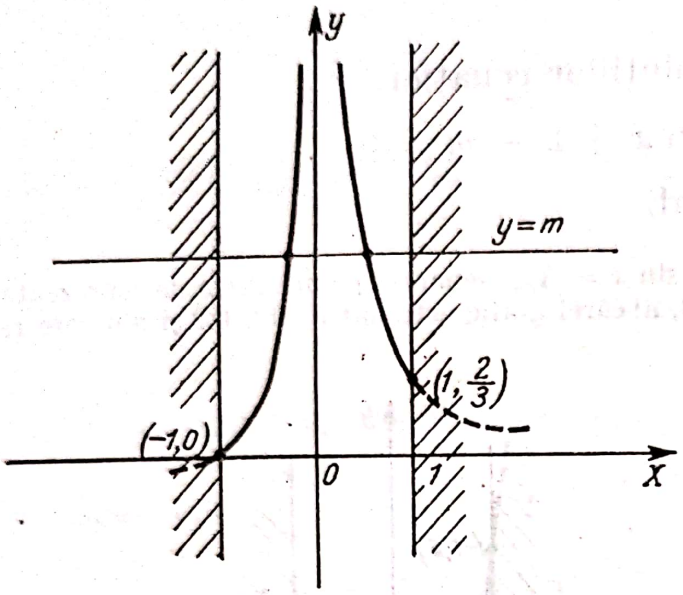


Fig. 6.3

Graficul funcţiei $y = \dfrac{X+1}{3X^2}$ este dat în fig. 6.3, din care rezultă:

— pentru $m \in (-\infty, 0)$ ecuaţia propusă nu are soluţii;

— pentru $m \in \left[0, \dfrac{2}{3}\right)$ ecuaţia are o singură soluţie;

— pentru $m \in \left[\dfrac{2}{3}, \infty\right)$ ecuaţia propusă are două soluţii.

Folosirea metodei a) indicată la 5.1,2° conduce la aceleaşi rezultate.

6.4. Să se discute natura soluţiilor ecuaţiei

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + m = 0,\quad m \in R.$$

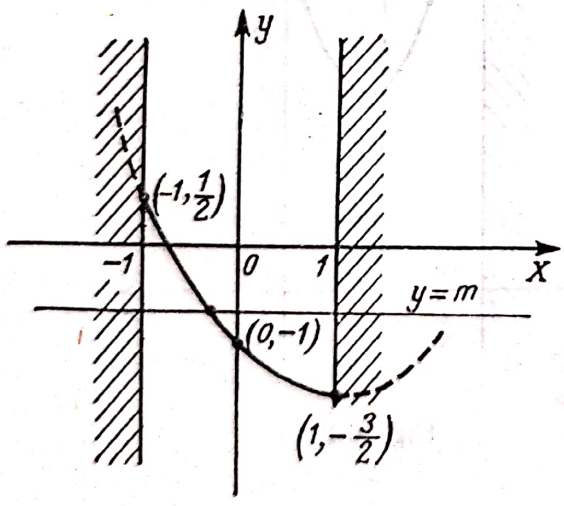


Fig. 6.4

R. Se ţine seama că $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$ şi luînd ca necunoscută pe $\sin 2x$, ecuaţia dată se transformă în

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(1+m) = 0. \quad (1)$$

Pentru discuţia ecuaţiei (1) se poate aplica oricare din metodele menţionate la exerciţiul precedent; aplicînd, de exemplu, metoda grafică şi reprezentînd funcţia $y = \dfrac{X^2-2X-2}{2}$, $X \in [-1, 1]$, (fig. 6.4), rezultă că pentru $m \in \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ ecuaţia dată are o singură soluţie.

6.5. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia

$$\sin^2 x + (m^2-1)\sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{m^2+1}{2},\ m \in R.$$

R. Se trece de la puteri de sinusuri la cosinusuri de arce duble și ecuația se transformă în

$$\cos 2x + (m^2 - 1)\cos 4x + \cos 6x = 0$$

sau, grupînd convenabil și transformînd sumele în produse, se obțin ecuațiile $\cos 4x = 0$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{k_1\pi}{2}$ și $\cos 2x = \frac{1-m^2}{2}$ cu $x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-m^2}{2} + k_2\pi$, $-1 \leqslant \frac{1-m^2}{2} \leqslant 1$, adică $m \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

6.6. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\sin^4 x + \cos^4 x = m(\sin^6 x + \cos^6 x), \quad m \in R.$$

R. Se pleacă de la $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și se ia ca necunoscută $\sin^2 2x = y$; ecuația dată devine $(3m-2)y^2 - 4(m-1) = 0$, de unde,

$$y_{1,2} = \pm 2\sqrt{\frac{m-1}{3m-2}}. \tag{1}$$

Pentru ca ecuația (1) să aibă soluții acceptabile (ca $\sin 2x$ să existe) este necesar ca m să satisfacă dubla inecuație $0 \leqslant \frac{m-1}{3m-2} \leqslant \frac{1}{4}$, de unde rezultă $m \in [1, 2]$.

6.7. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$(1-a)\cos 4x - 2(5-2a)\cos 2x + 5a + 13 = 0, \quad a \in R.$$

Caz particular: $a = -5$.

R. Se trece de la $\cos 4x$ la $\cos 2x$ și se obține ecuația

$$(1-a)\cos^2 2x - (5-2a)\cos 2x + (3a+6) = 0. \tag{1}$$

Dar ecuația (1) nu are decît o singură rădăcină acceptabilă

$$\cos 2x_1 = \frac{2+a}{1-a}. \tag{2}$$

Punînd condiția ca $-1 \leqslant \frac{2+a}{1-a} \leqslant 1$, rezultă valorile lui a pentru care ecuația dată are soluții și anume $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. Pentru $a = -5$, rezultă $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + (2k_1 + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

6.8. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\sin 2x + \sin 3x = m \sin x, \quad m \in R.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. O soluție evidentă este $x_1 = k\pi$, pentru orice $m \in R$; ecuația rămasă de discutat este

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 - m = 0. \tag{1}$$

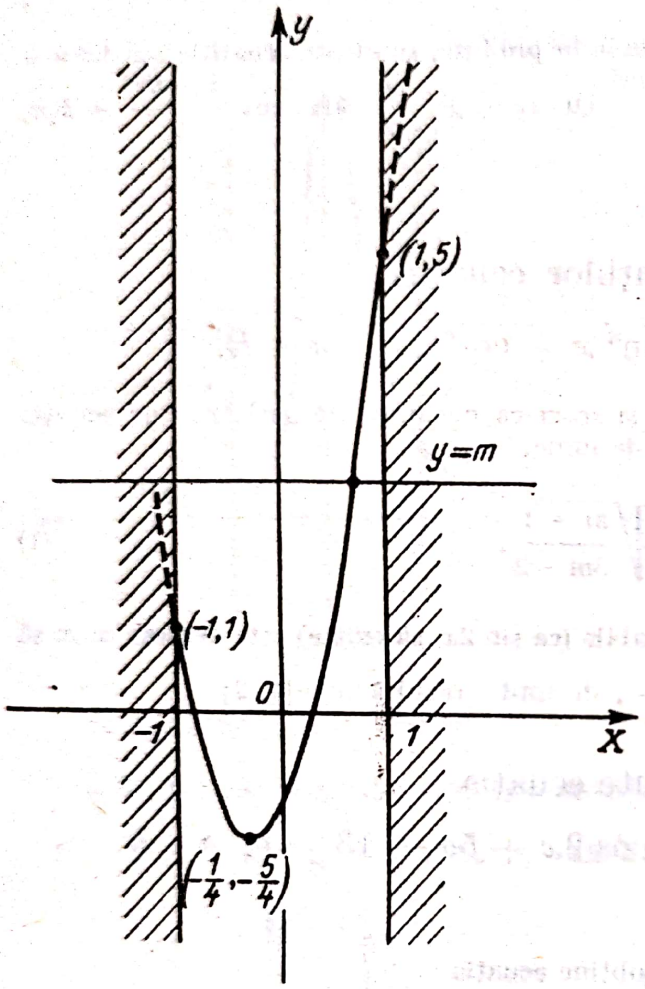


Fig. 6.8

Punînd $\cos x = X \in [-1, 1]$ și separînd pe m, obținem

$$4X^2 + 2X - 1 = m, \tag{1'}$$

Din graficul funcției $y_1 = 4X^2 + 2X - 1$ dat în fig. 6.8 rezultă:

– pentru $m \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup (5, \infty)$ ecuația (1) nu are soluții;

– pentru $m \in \left(-\frac{5}{4}, 1\right]$ ecuația are două soluții;

– pentru $m \in (1, 5] \cup \left\{-\frac{5}{4}\right\}$ ecuația (1) are o soluție.

Aceleași rezultate obținem, dacă punem condiții ca ecuația (1') să aibă două soluții în intervalul $[-1, 1]$, adică

$$\Delta > 0,\ a \cdot f(-1) \geqslant 0,\ af(1) \geqslant 0,$$

$$-1 < -\frac{b}{2a} < 1,$$

sau o soluție dacă $f(-1) \cdot f(1) < 0$; cazurile $\Delta = 0$ și $f(-1) \cdot f(1) = 0$ se vor studia separat, reținîndu-se valorile corespunzătoare ale lui m pentru care ecuația are o singură soluție.

6.9. Se dă ecuația

$$\cos^3 x + (a + a^2)\cos^2 x + (a^3 + a^2 - 1)\cos x + a^3 - a = 0,$$

unde a este un parametru real. Se cere:

1° Să se rezolve ecuația notînd $y = \cos x$.

2° Pentru $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ să se afle valorile lui x care verifică ecuația dată.

3° Fie $y_1 = \cos x_1$, $y_2 = \cos x_2$, $y_3 = \cos x_3$ rădăcinile ecuației de la 1°. Să se calculeze

$$E = \operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 + \operatorname{tg} x_2 \cdot \operatorname{tg} x_3 + \operatorname{tg} x_3 \cdot \operatorname{tg} x_1$$

R. 1° $\cos x_1 = -1$, $\cos x_2 = -a$, $\cos x_3 = 1 - a^2$ și pentru ca ecuația să aibă trei soluții distincte este necesar ca $|a| < 1$.

Scanned with OKEN Scanner

2° $x_1 = \pi + 2k_1\pi$, $x_2 = (2k_2 + 1)\,\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $x_3 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k_3\pi$, $k_{1,2,3} \in Z$.

3° $E = \pm\sqrt{\frac{2 - a^2}{1 - a^2}}$.

6.10. Se dă ecuaţia

$$2\,(2a + 1)\cos^2 x + 3\cos x + (1 - a) = 0$$

şi se cere :

— să se rezolve ecuaţia ;

— să se determine a astfel încît ecuaţia să aibă soluţii cuprinse în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

R. Rezolvînd ecuaţia, se obţine $\cos x_1 = \frac{a - 1}{2a + 1}$ şi $\cos x_2 = -\frac{1}{2}$. Pentru ca x_1 să fie cuprins în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ este necesar ca parametrul a să verifice dubla inecuaţie $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{a - 1}{2a + 1} \leqslant 1$.

6.11. Să se discute natura soluţiilor ecuaţiei

$$(p + 1)\cos 2x + 2p^2 \sin x + 1 - 3p = 0,\ p \in R.$$

R. Ecuaţia dată este echivalentă cu

$$(p + 1)\sin^2 x - p^2 \sin x + p - 1 = 0$$

şi deoarece $\Delta = (p^2 - 2)^2$ este un pătrat perfect, este de preferat a se rezolva ecuaţia, ale cărei rădăcini sînt $\sin x_1 = p - 1$ şi $\sin x_2 = \frac{1}{p + 1}$, punîndu-se apoi condiţiile $-1 \leqslant \sin x_1 \leqslant 1$ şi $-1 \leqslant \sin x_2 \leqslant 1$.

Altfel. Ecuaţia are două soluţii distincte cînd p satisface inecuaţiile

$$\Delta > 0,\ af(-1) \geqslant 0,\ af(1) \geqslant 0,\ -1 < \frac{-b}{2a} < 1$$

şi o singură soluţie dacă p satisface inecuaţiile $\Delta > 0$, $f(-1)\cdot f(1) < 0$ cazurile $\Delta = 0$ şi $f(-1)\cdot f(1) = 0$ studiindu-se separat.

6.12. Să se discute natura soluţiilor ecuaţiei

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = m \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right),\ m \in R.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Dezvoltînd și efectuînd simplificările respective, ecuația dată se transformă în

$$\cos 3x + \sin 3x = m(\cos x - \sin x).$$

care se descompune în $\cos x - \sin x = 0$, de unde $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, și $4\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right) = m + 3$ sau $\sin 2x = \frac{m-1}{2}$. Pentru ca această ecuație să aibă soluții este necesar ca $-1 \leqslant \frac{m-1}{2} \leqslant 1$, adică $m \in [-1, 3]$.

6.13. Să se găsească valorile parametrului real m pentru care ecuația $(m^2 + 1)\cos^2 x - \sin x + 1 - m = 0$ are cele mai multe soluții.

R. Ecuația dată este echivalentă cu

$$(m^2 + 1)\sin^2 x + \sin x - (m^2 - m + 2) = 0.$$

care are două soluții dacă sînt satisfăcute concomitent inecuațiile

$$\Delta > 0,\ af(-1) \geqslant 0,\ af(1) \geqslant 0,\ -1 < -\frac{b}{2a} < 1.$$

Rezolvarea inecuațiilor conduce la rezultatul $m \in [2, \infty)$.

De observat că ecuația dată are o singură soluție, dacă sînt satisfăcute concomitent inecuațiile

$$\Delta \rhd 0,\ f(-1) \cdot f(1) < 0$$

(și separat $\Delta = 0$, $f(-1)\,f(1) = 0$), din care, fără nici o dificultate rezultă că $m \in [0, 2)$. În consecință, pentru valorile lui $m \in (-\infty, 0)$ ecuația nu are nici o soluție.

6.14. Să se găsească valorile parametrului real m pentru care ecuația

$$(m^2 + 1)\sin^2 x - \cos x + 1 - m = 0$$

are cele mai multe soluții.

R. Procedeu analog ca la exercițiul precedent; ecuația dată este echivalentă cu $(m^2 + 1)\cos^2 x + \cos x - (m^2 - m + 2) = 0$. Pentru a avea cele mai multe soluții acceptabile, este necesar ca m să satisfacă concomitent inecuațiile

$$\Delta > 0,\ af(-1) \geqslant 0,\ af(1) \geqslant 0,\ -1 < -\frac{b}{2a} < 1.$$

Se va observa de asemenea că pentru $m \in [0, 2)$ ecuația are o soluție, iar pentru $m \in (-\infty, -1)$ ecuația nu are soluții.

Scanned with OKEN Scanner

6.15. Să se discute natura soluţiilor ecuaţiei

$$(m^2+1)\cos^2 x + (m+1)\cos x - 3 = 0,\ m \in R.$$

R. Pentru ca ecuaţia dată să aibă două soluţii este necesar ca m să satisfacă simultan următoarele inecuaţii:

$$\Delta \rhd 0,\ a\cdot f(-1) \geqslant 0,\ a\cdot f(1) \geqslant 0,\ -1 < -\frac{b}{2a} < 1, \tag{1}$$

iar pentru ca ecuaţia respectivă să aibă o singură soluţie este necesar ca m să satisfacă inecuaţiile

$$\Delta \rhd 0,\ f(-1)\cdot f(1) \lhd 0 \text{ (şi separat } \Delta = 0,\ f(-1)\cdot f(1) = 0). \tag{2}$$

Din (1) rezultă că $m \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$, iar din (2) rezultă că $m \in \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

6.16. Să se discute natura soluţiilor ecuaţiei

$$m^3\cos^2 x - \cos x + m = 0.$$

R. Procedeu analog ca la exerciţiul precedent; pentru $m \in (-\infty, \beta] \cup \left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \infty\right)$ ecuaţia are două soluţii şi pentru $m \in [\beta, \alpha]$ ecuaţia are o singură soluţie, unde $\alpha \in (-1, 0)$, $\beta \in (-2, -1)$.

6.17. Să se rezolve ecuaţia

$$m(2\cos x + 1)^2 - (m+1)(2\cos x + 1) + 1 = 0,\ m \in R.$$

R. Punînd $2\cos x + 1 = u$, ecuaţia dată se transformă în $mu^2 - (m+1)u + 1 = 0$ cu rădăcinile $u_1 = 1$ şi $u_2 = \frac{1}{m}$, cu o soluţie evidentă $x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, $k \in Z$, cealaltă soluţie fiind dată de ecuaţia

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - 1\right). \tag{1}$$

Evident, pentru ca ecuaţia (1) să aibă soluţie este necesar ca m să verifice dubla inecuaţie $-1 \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - 1\right) \leqslant 1$, din care rezultă că $m \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$. Rezultă că

Scanned with OKEN Scanner

pentru $m \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ ecuaţia dată are o singură soluţie, iar pentru restul valorilor, două soluţii.

6.18. Să se discute natura soluţiilor ecuaţiei

$$m(1-m)\sin^2 x - \sin x + m(1+m) = 0, \quad m \in R.$$

R. Deoarece $\Delta = (2m^2-1)^2$, este preferabil a se calcula rădăcinile ecuaţiei; avem

$$\sin x_1 = \frac{m}{1-m} \text{ şi } \sin x_2 = \frac{1+m}{m}. \tag{1}$$

Pentru ca ecuaţia să aibă o singură soluţie este necesar ca m să verifice unul din sistemele de inecuaţii:

$$-1 \leqslant \frac{m}{1-m} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \frac{1+m}{m} \leqslant 1. \tag{1'}$$

Rezolvînd aceste sisteme, rezultă că pentru $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ ecuaţia are două soluţii, iar pentru $m \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ecuaţia are o singură soluţie (v. fig. 6.18).

Altfel. Notăm $\sin x = X$ şi ecuaţia din enunţ devine

$$m(1-m)X^2 - X + m(1+m) = 0, \tag{2}$$

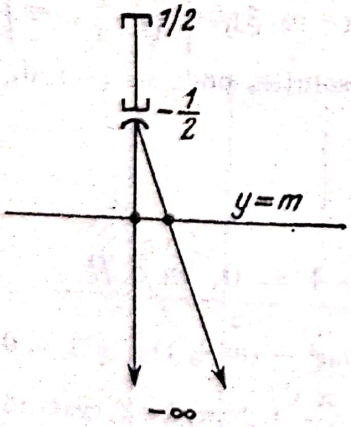


Fig. 6.18

Ca ecuaţia (2) să aibă o singură soluţie este necesar să avem

$$\Delta > 0,\ f(-1)\cdot f(1) < 0 \text{ (separat studiindu-se cazul } \Delta = 0,\ f(-1)\,f(1) = 0), \tag{3}$$

iar pentru a avea două soluţii (distincte), trebuie să avem

$$\Delta > 0,\ af(-1) \geqslant 0,\ af(1) \geqslant 0,\ -1 < -\frac{b}{2a} < 1, \tag{4}$$

Rezolvînd inecuaţiile (3), se obţine $m \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, iar din inecuaţiile (4) se obţine $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

6.19. Să se discute natura soluţiilor ecuaţiei

$$\sin x + \cos x + \sin 2x = m, \qquad m \in R.$$

R. Se ia ca necunoscută $\sin x + \cos x = X$, $X \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, şi ecuaţia dată se transformă în

$$X^2 + X - 1 = m. \tag{1}$$

Folosind metoda grafică, soluțiile ecuației (1) sînt abscisele punctelor de intersecție a parabolei $y_1 = X^2 + X - 1$ cu dreapta $y_2 = m$. Din fig. 6.19 rezultă:

– pentru $m \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup (\sqrt{2} + 1, \infty)$ ecuația nu are nici o soluție;

– pentru $m \in \left(-\frac{5}{4}, 1 - \sqrt{2}\right)$ ecuația are două soluții;

– pentru $m \in \left(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} + 1\right) \cup \left\{-\frac{5}{4}\right\}$ ecuația are o soluție.

Altfel. Ca ecuația (1) să aibă două rădăcini cuprinse în intervalul $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ este necesar ca m să satisfacă concomitent inecuațiile

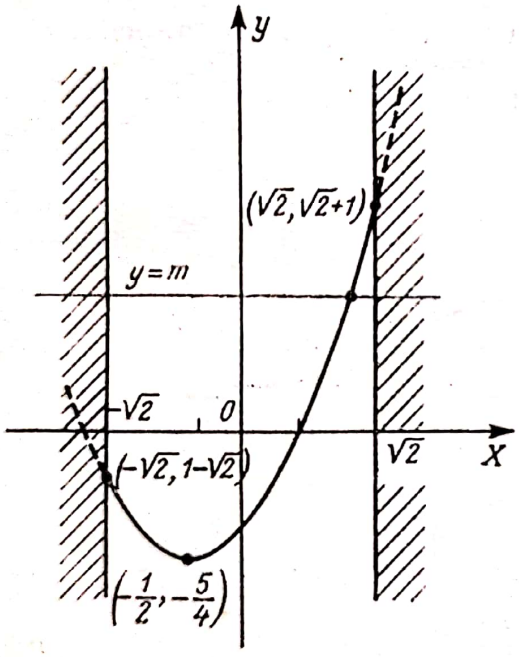


Fig. 6.19

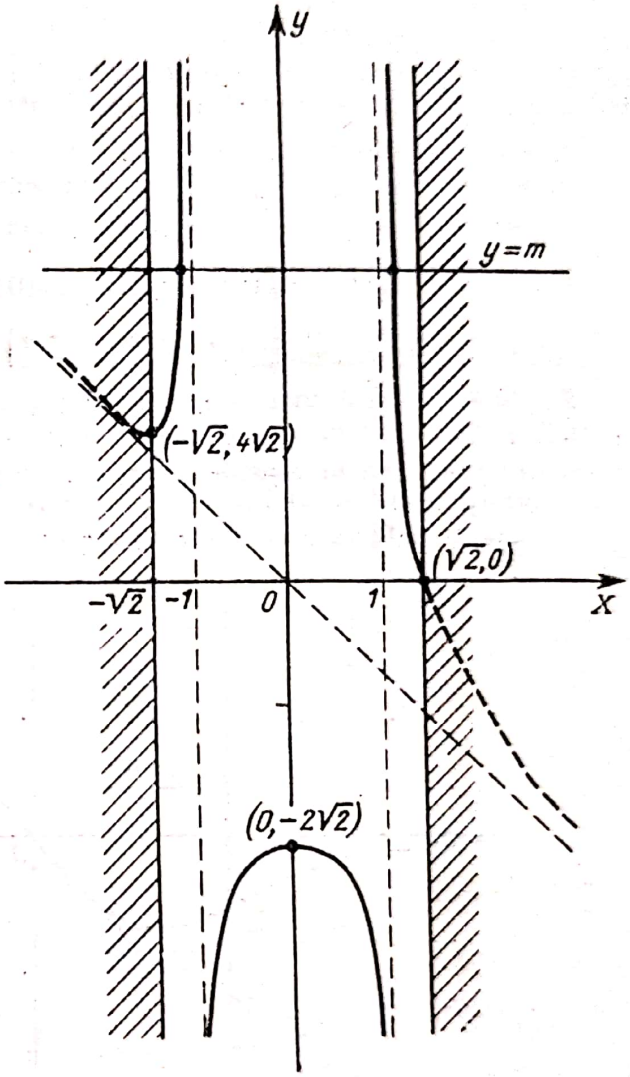


Fig. 6.20.

$$\Delta > 0,\ af(-\sqrt{2}) \geqslant 0,\ af(\sqrt{2}) \geqslant 0,\quad -\sqrt{2} < -\frac{b}{2a} < \sqrt{2},$$

iar pentru ca aceeași ecuație să aibă o singură rădăcină cuprinsă în intervalul considerat, este necesar ca m să verifice inegalitățile $\Delta > 0$, $f(-\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) \leqslant 0$, studiindu-se separat cazurile în care $\Delta = 0$ și $f(-\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) = 0$ și reținîndu-se valorile corespunzătoare ale lui m.

6.20. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$(\cos x - \sin x)^3 - m(\cos x - \sin x)^2 + m - 2\sqrt{2} = 0,\ m \in R.$$

R. Se știe că $\max(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}$ și că $\min(\cos x - \sin x) = -\sqrt{2}$. Pentru rezolvarea prin metoda grafică, notăm $\cos x - \sin x = X$, $X \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Avem deci de reprezentat grafic funcția

$$y_1 = \frac{2\sqrt{2} - X^3}{X^2 - 1} \tag{1}$$

soluțiile ecuației fiind date de punctele de intersecție ale dreptei $y_2 = m$ cu curba reprezentativă a funcției (1). Din studiul graficului dat în fig. 6.20, *a* rezultă următoarele:

— pentru $m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup [4\sqrt{2}, \infty)$ ecuația are două soluții.

— pentru $m \in [0, 4\sqrt{2}) \cup \{-2\sqrt{2}\}$ ecuația are o soluție;

— pentru $m \in (-2\sqrt{2}, 0)$ ecuația nu are soluții.

6.21. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$m(\sqrt{3}\cos x + \sin x)^2 - 2(\sqrt{3}\cos x + \sin x) + m = 0.$$

R. Se cercetează mai întîi extremele funcției $g(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ pentru $x \in [0, 2\pi]$, rezultînd $\max(g(x)) = +2$ și $\min(g(x)) = -2$. În ecuația dată în enunț, în care se poate lua în considerare ca necunoscută $\sqrt{3}\cos x + \sin x$, se pun condiții:

— ecuația dată să aibă o soluție cuprinsă în intervalul $[-2, 2]$;

— ecuația dată să aibă două soluții în intervalul considerat.

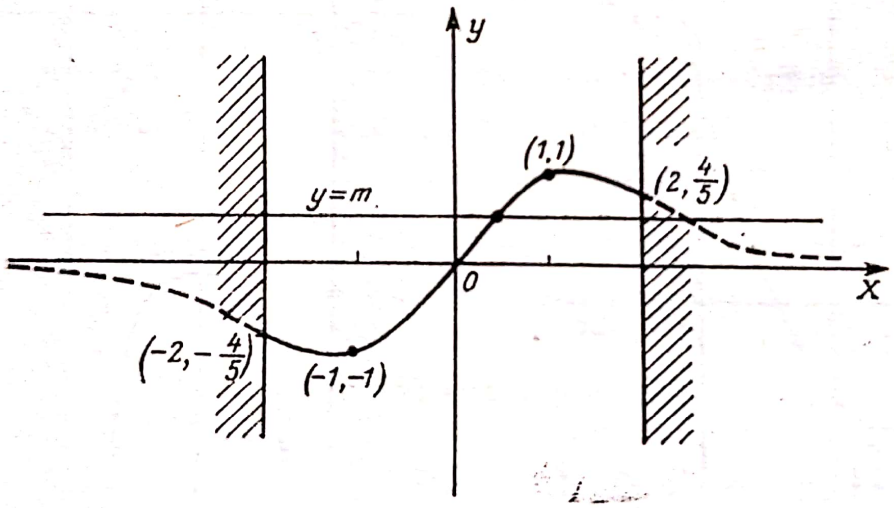


Fig. 6.21

În rezolvarea acestei probleme se pot folosi sau metoda grafică sau teoremele privitoare la separarea rădăcinilor unei ecuații algebrice de gradul al doilea.

Altfel. Se reprezintă grafic funcția

$$f(x) = \frac{2X}{X^2 + 1}, \quad X \in [-2, 2], \tag{1}$$

soluțiile ecuației respective fiind date de abscisele punctelor comune (v. fig. 6.21) ale graficului funcției (1) și dreptei $y = m$. Rezultă:

— pentru $m \in \left(-1, -\frac{4}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right)$ ecuația are două soluții;

Scanned with OKEN Scanner

– pentru $m = \pm 1$ și $m \in \left(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ecuația are o singură soluție;

– pentru $m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ecuația nu are soluții.

6.22. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\sin^3 x - m \sin^2 x - m = 0, \qquad m \in R.$$

R. Folosim metoda grafică. Separînd pe m, obținem

$$m = \frac{\sin^3 x}{1 + \sin^2 x}, \qquad (1)$$

soluțiile ecuației din enunț fiind date de intersecțiile curbei de ecuație $y = \frac{\sin^3 x}{1 + \sin^2 x}$ cu dreapta $y = m$.

Pentru ușurința calculului, notăm $\sin x = X$, $X \in [-1, 1]$. Graficul funcției $y = \frac{X^3}{1 + X^2}$ este dat în fig. 6.22, din care rezultă că ecuația din enunț are o singură soluție pentru $m \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

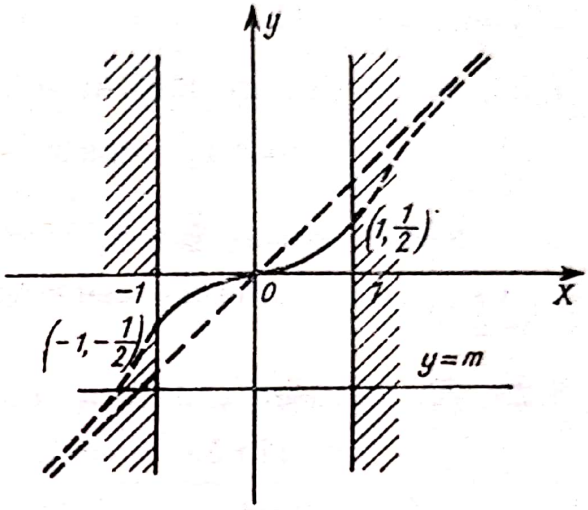


Fig 6.22.

6.23. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$m \sin^3 x + m \cos^3 x - 1 = 0, \qquad m \in R.$$

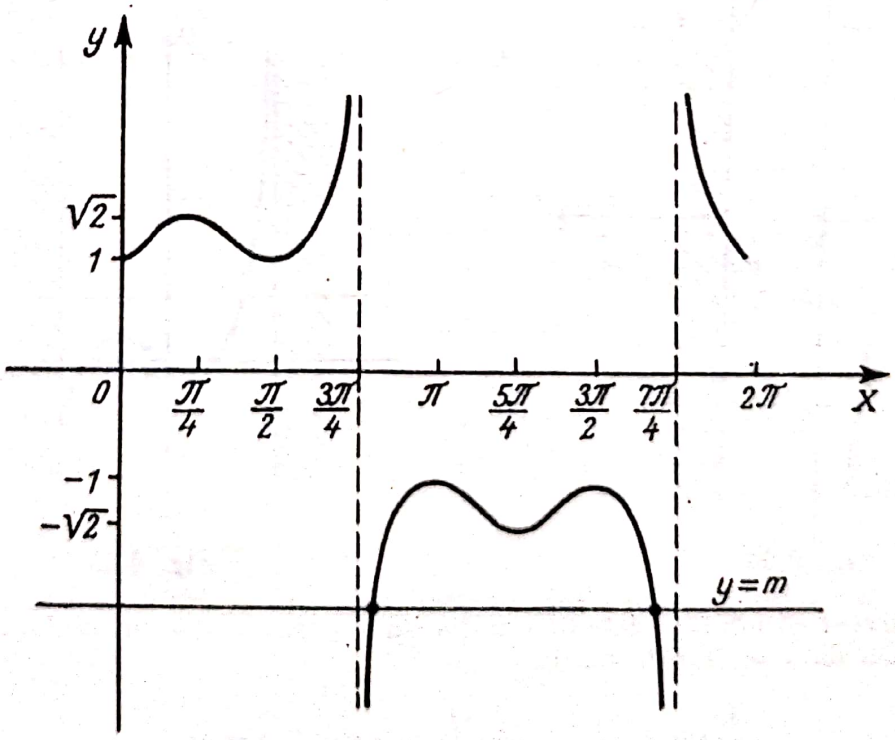


Fig. 6.23

Scanned with OKEN Scanner

R. Se folosește metoda grafică, soluțiile ecuației fiind abscisele punctelor de intersecție a curbei de ecuație $y = \dfrac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ cu dreapta $y = m$. Din graficul dat în fig. 6.23 rezultă că pe intervalul $[0, 2\pi]$:

– pentru $m \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ ecuația are două soluții;
– pentru $m \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$ ecuația are patru soluții;
– pentru $m \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$ ecuația are trei soluții.

6.24. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$m \cos^3 x - \cos x - 1 = 0, \qquad m \in R.$$

R. Se folosește metoda grafică, luînd în considerare funcțiile $y = \dfrac{X+1}{X^3}$ și $y = m$, $X \in [-1, 1]$. Graficul este redat în fig. 6.24, din care rezultă și concluziile necesare cerute prin enunț.

6.25. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\frac{\sin 5x + \cos 5x}{\sec x + \operatorname{cosec} x} = m, \qquad m \in R.$$

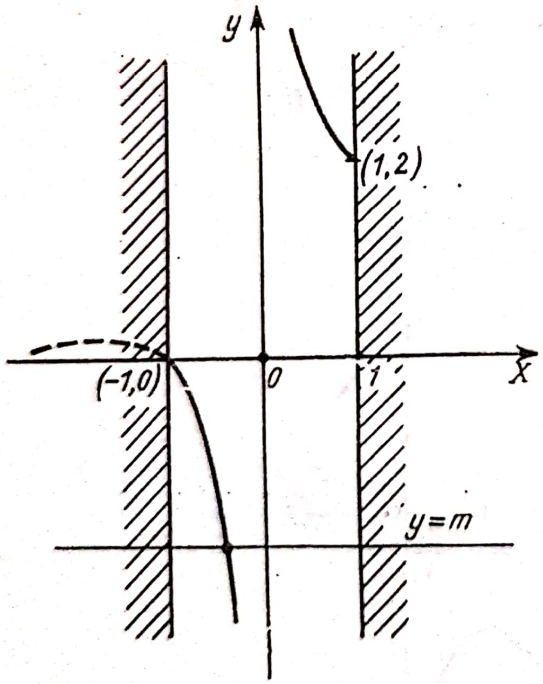


Fig. 6.24

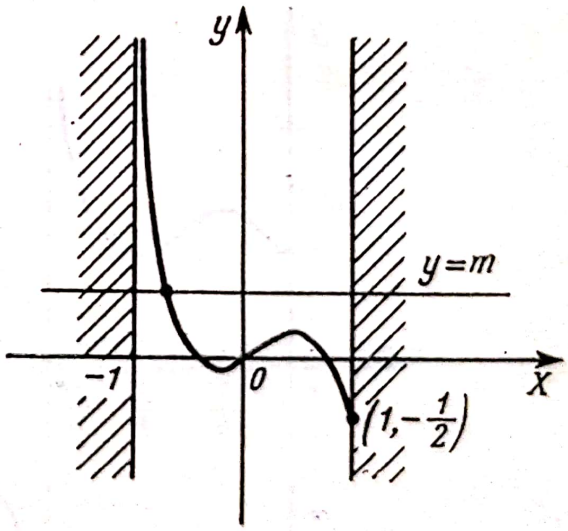


Fig. 6.25

R. De observat că soluțiile date de ecuația $\sin x + \cos x = 0$ sînt excluse; efectuînd calculele ecuația dată se transformă în

$$\frac{1}{2} \sin 2x \,(1 + 2 \sin 2x - 4 \sin^2 2x) = m. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\frac{1}{2} X (1 + 2X - 4X^2) = m, \qquad X \in [-1, 1]. \tag{1'}$$

Dar ecuația (1') se poate discuta fie prin metoda grafică, fie cu ajutorul teoremei lui Rolle.

a) *Metoda grafică.* Se trasează graficul funcției

$$y = -2X^3 + X^2 + \frac{1}{2} X,$$

soluțiile ecuației (1') fiind abscisele punctelor de intersecție ale curbei y cu dreapta $y = m$ (v. fig. 6.25), tabloul de variație a funcției y fiind

X	-1		$-\frac{1}{6}$		0	$\frac{1}{2}$		1
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	$-\frac{5}{108}$	$\nearrow$	0 $\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$
			min			max		

b) Discuția ecuației (1') cu teorema lui Rolle rezultă din tabloul :

X	-1		$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$		1	
m \ $f(X)$	$2m-5$		$2m+\frac{5}{54}$		$2m-\frac{1}{2}$		$2m+1$	Concluzii
$-\infty$								
	$-$		$-$		$-$		$-$	nici o soluție
$-1/2$	$-$		$-$		$-$		0	o soluție $X = 1$
	$-$		$-$		$-$		$+$	o soluție
$-5/108$	$-$		0		$-$		$+$	două soluții (una dublă)
	$-$		$+$		$-$		$+$	trei soluții
$1/4$	$-$		$+$		0		$+$	două soluții (una dublă)
	$-$		$+$		$+$		$+$	o soluție
$5/2$	0		$+$		$+$		$+$	o soluție
	$+$		$+$		$+$		$+$	nici o soluție
$+\infty$								

N o t ă. Se va observa că ecuația admite o soluție singulară cînd $\sin x + \cos x \to 0$ deoarece

$$\lim_{\cos x + \sin x \to 0} \frac{\cos 5x + \sin 5x}{\sec x + \operatorname{cosec} x}$$

există.

Scanned with OKEN Scanner

6.26. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = m \operatorname{tg} 2x, \qquad m \in R.$$

R. Ecuația dată se poate scrie sub forma

$$\frac{-\sin 2x}{\cos x \cos 3x} = m \frac{\sin 2x}{\cos 2x}, \qquad (1)$$

iar soluția este dată de $\sin 2x = 0$, adică $x = k\pi$ (soluția $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, fiind exlusă). Astfel din ecuația (1) rămine

$$2m \cos^2 2x + (m+2) \cos 2x - m = 0. \qquad (1')$$

Natura soluțiilor ecuației (1') se poate stabili fie prin metoda grafică, fie prin separarea rădăcinilor ecuației algebrice

$$2mX^2 + (m+2)X - m = 0, \quad X \in [-1, 1]. \qquad (1'')$$

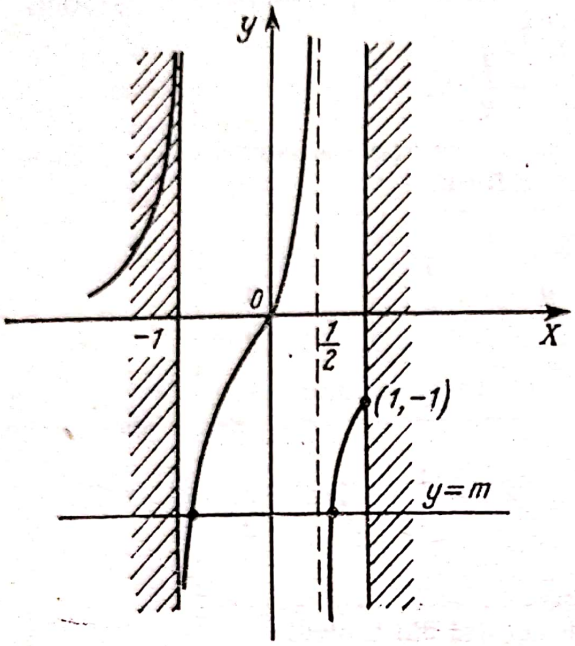


Fig. 6.26

Se separă m din (1'') și se trasează graficul funcției $y = -\frac{2X}{2X^2 + X - 1}$ (v. fig. 6.26), din care rezultă:

— pentru $m \in (-\infty, -1]$ ecuația (1'') are două rădăcini și deci ecuația (1') are două soluții;

— pentru $m \in (-1, \infty)$ ecuația (1') are o singură soluție.

Altfel. Ca ecuația (1'') să aibă o rădăcină și deci (1') o soluție este necesar ca m să satisfacă sistemul de inecuații

$$\Delta > 0, \ f(-1) \cdot f(1) < 0 \ (\text{și separat } \Delta = 0, f(-1) \cdot f(1) = 0), \qquad (2)$$

unde s-a notat cu $f(X)$ membrul întîi al ecuației (1''); iar pentru ca ecuația (1'') să aibă două rădăcini și deci (1') două soluții este necesar ca m să satisfacă sistemul de inecuații

$$\Delta > 0, \ a \cdot f(-1) \geqslant 0, \ a \cdot f(1) \geqslant 0, \ -1 < -\frac{b}{2a} < 1. \qquad (3)$$

Din (2) rezultă $m \in (-1, \infty)$, iar din (3) rezultă $m \in (-\infty, -1]$.

6.27. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\cos^3 x - \sin^3 x + 1 - m = 0.$$

R. Folosim teorema lui Rolle și notînd cu $f(x)$ membrul întîi al ecuației, avem $f'(x) = 3\cos^2 x \sin x - 3\sin^2 x \cos x$. Rezolvînd ecuația $f(x) = 0$, obținem $x_1 = \frac{k_1\pi}{2}$ și $x_2 = \frac{3\pi}{4} + k_2\pi$. Dacă luăm în considerare doar intervalul $[0, 2\pi]$, soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sînt: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, $x_3 = \pi$, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$, $x_5 = \frac{7\pi}{4}$, $x_6 = 2\pi$. Numărul soluțiilor ecuației din enunț se poate citi în tabloul de variație întocmit conform teoremei lui Rolle.

x	0	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π	Concluzii
m \ $f(x)$	$2-m$	$-m$	$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-m$	$-m$	$2-m$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)-m$	$2-m$	
	+	+	+	+	+	+	+	nici o soluție
0	+	0	+	0	+	+	+	două soluții $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\pi$
	+	−	+	−	+	+	+	patru soluții
$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	+	−	0	−	+	+	+	trei soluții din care $x_1=3\pi/4$
	+	−	−	−	+	+	+	două soluții
$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	+	−	−	−	+	0	+	trei soluții din care $x_1=7\pi/4$
	+	−	−	−	+	−	+	patru soluții
2	0	−	−	−	0	−	0	trei soluții $x_1=0$, $x_2=3\pi/2$, $x_2=2\pi$
	−	−	−	−	−	−	−	nici o soluție

Rezultă că, în intervalul $[0, 2\pi]$, pentru $m \in [0, 2]$ ecuația are de la două pînă la patru soluții.

Scanned with OKEN Scanner

6.28. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = m,$$

unde m este un parametru real. Caz particular : $m = \frac{1}{2}$.

R. Multiplicînd pe m cu $\cos^2 x + \sin^2 x$ și împărțind ecuația prin $\cos^2 x$, aceasta devine

$$(1 - m)\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - (2 + m) = 0, \qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z.$$

Pentru ca această ecuație să aibă soluții este necesar ca $\Delta = 1 + (1 - m)(2 + m) \geqslant 0$, de unde rezultă

$$m \in \left[-\frac{1 + \sqrt{13}}{2},\ \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right],$$

soluțiile fiind date de ecuațiile elementare

$$\operatorname{tg} x = \frac{-1 \pm \sqrt{3 - m(1 + m)}}{1 - m}.$$

Pentru $m = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x = 1$ cu $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ și $\operatorname{tg} x = -5$ cu $x_2 = \operatorname{arctg}(-5) + k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

6.29. Să se rezolve și să se discute soluțiile ecuației

$$\operatorname{tg}^2 x = m \operatorname{tg}(x + a)\operatorname{tg}(x - a),$$

unde m este un parametru real, iar a constantă. Caz particular : $m = 1$.

R. Dezvoltînd membrul al doilea și apoi eliminînd numitorii, ecuația propusă devine

$$\operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^4 x - (1 - m)\operatorname{tg}^2 x - m \operatorname{tg}^2 a = 0.$$

Notăm $\operatorname{tg} x = t$ și $\operatorname{tg} a = \alpha$, ecuația devenind

$$\alpha^2 t^4 - (1 - m) t^2 - m\alpha^2 = 0,$$

adică o ecuație bipătrată în raport cu t. Această ecuație are toate rădăcinile reale dacă

$$(1 - m)^2 + 4m\alpha^4 \geqslant 0, \qquad \frac{1 - m}{\alpha^2} \geqslant 0, \qquad -m \geqslant 0$$

și are numai două rădăcini reale, dacă

$$(1 - m)^2 + 4m\alpha^2 > 0, \quad -m < 0.$$

Pentru $m = 1$, ecuația propusă se reduce la $\operatorname{tg}^4 x = 1$, de unde $\operatorname{tg} x = \pm 1$, cu $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

6.30. Să se studieze natura soluțiilor ecuației

$$m(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) - (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0, \quad m \in R.$$

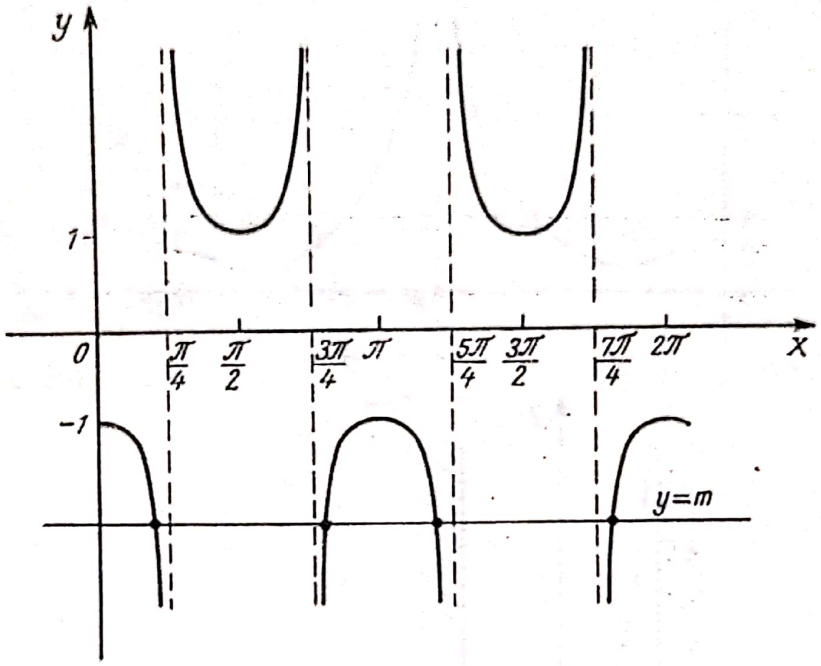


Fig. 6.30

R. Se aplică metoda grafică ; soluțiile ecuației rezultă din intersecția graficului funcției $y = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}$ cu dreapta $y = m$. Din fig. 6.30, în care s-a luat în considerare intervalul $[0, 2]$, rezultă.

– pentru $m \in (-1, 1)$ ecuația nu are soluții ;
– pentru $m \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ ecuația are două soluții.

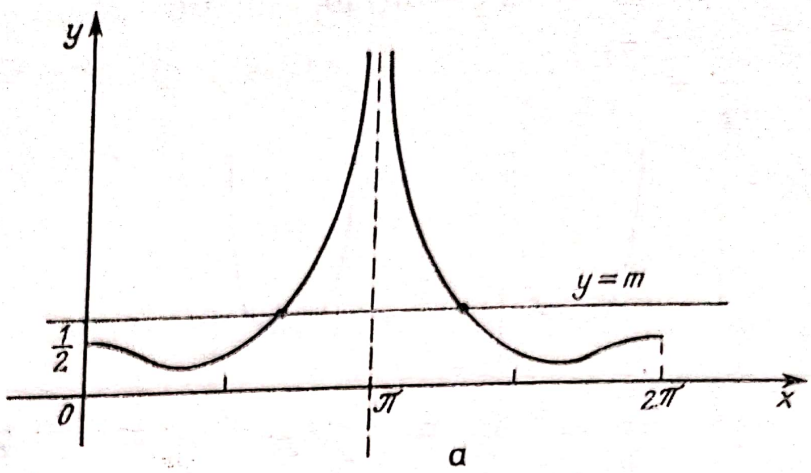
Altfel. Se poate lua ca necunoscută $\operatorname{tg} x$, rezultînd $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\dfrac{m+1}{m-1}}$, cu aceleași concluzii ca mai înainte.

6.31. Să se studieze natura soluțiilor ecuației

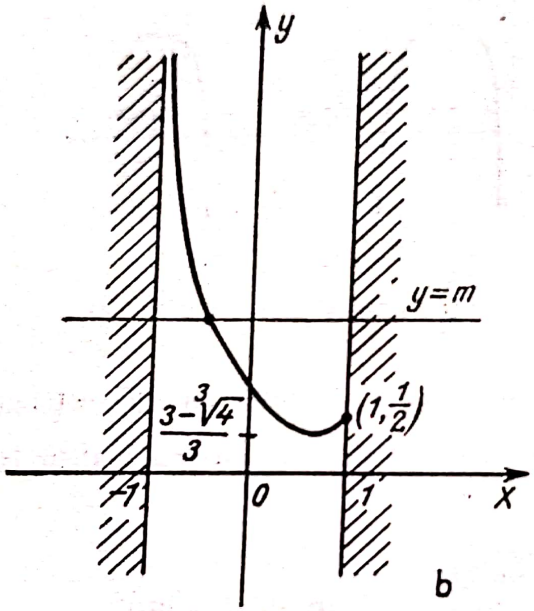
$$(m-1)\cos^3 x + \cos x - 1 + m = 0.$$

R. Se aplică metoda grafică, trasîndu-se graficul funcției $y = \dfrac{\cos^3 x - \cos x + 1}{\cos^3 x + 1}$ (v. fig. 6.31, *a*) sau graficul funcției $y = \dfrac{X^3 - X + 1}{X^3 + 1}$ (v. fig. 6.31, *b*) ; din ambele grafice rezultă ;

– pentru $m \in \left(-\infty, \dfrac{3 - \sqrt[3]{4}}{3}\right)$ ecuația nu are soluții ;



a



b

Fig. 6.31

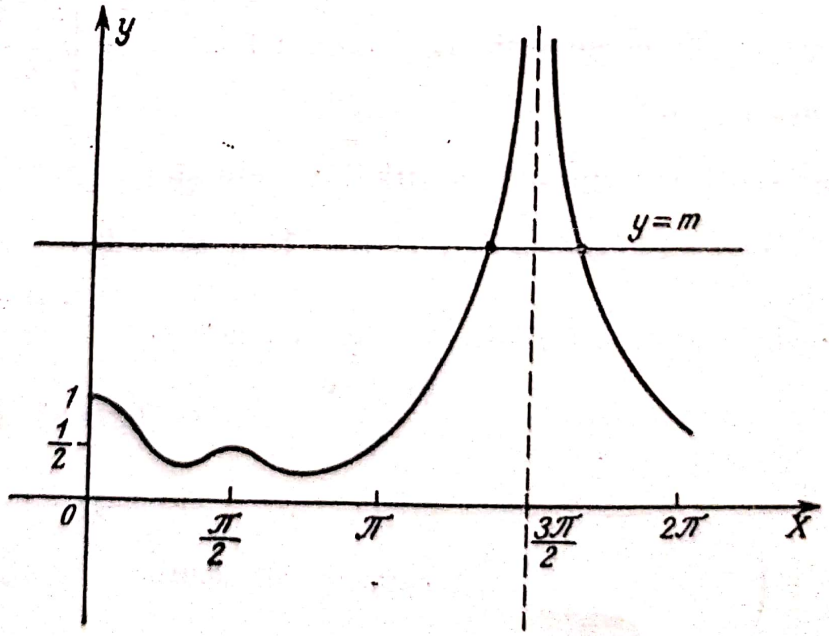


Fig. 6.32

Scanned with OKEN Scanner

– pentru $m \in \left(\frac{3-\sqrt[3]{4}}{3}, \frac{1}{2}\right]$ ecuația are două soluții;

– pentru $m \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \cup \left\{\frac{3-\sqrt[3]{4}}{3}\right\}$ ecuația are o singură soluție.

6.32. Să se studieze natura soluțiilor ecuației

$$(m-1)\sin^3 x + \sin x - 1 + m = 0, \qquad m \in R.$$

R. Din graficul funcției $y = \frac{\sin^3 x - \sin x + 1}{\sin^3 x + 1}$ dat în fig. 6.32 rezultă următoarele:

– pentru $m \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ ecuația nu are soluții;

– pentru $m \in \left(\frac{3-\sqrt[3]{4}}{3}, \frac{1}{2}\right]$ ecuația are două soluții;

– pentru $m \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \cup \left\{\frac{3-\sqrt[3]{4}}{3}\right\}$ ecuația are o soluție.

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 1

FORMULE TRIGONOMETRICE

A.1. Funcții trigonometrice de arce multiple

$$\sin 2a = 2\cos a \sin a\,;\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a\,;\ \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\sin na = C_n^1 \sin a \cos^{n-1} a - C_n^3 \sin^3 a \cos^{n-3} a + C_n^5 \sin^5 a \cos^{n-5} a - \ldots$$

$$\cos na = \cos^n a - C_n^2 \cos^{n-2} a \sin^2 a + C_n^4 \cos^{n-4} a \sin^4 a - \ldots$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a},\quad \operatorname{ctg} 2a = \frac{\operatorname{ctg}^2 a - 1}{2\operatorname{ctg} a}$$

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}$$

$$\operatorname{ctg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c - \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} c}{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} c + \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c - 1}$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a},\quad \operatorname{ctg} 3a = \frac{\operatorname{ctg}^3 a - 3\operatorname{ctg} a}{3\operatorname{ctg}^2 a - 1}$$

$$\operatorname{tg} na = \frac{C_n^1 \operatorname{tg} a - C_n^3 \operatorname{tg}^3 a + C_n^5 \operatorname{tg}^5 a - \ldots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 a + C_n^4 \operatorname{tg}^4 a - C_n^6 \operatorname{tg}^6 a + \ldots}$$

A.2. Transformări de sume de funcții trigonometrice în produse (formule calculabile prin logaritmi)

$$\sin a \pm \sin b = 2\sin \frac{a \pm b}{2} \cos \frac{a \mp b}{2}$$ (semnele corespund)

Scanned with OKEN Scanner

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -\sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b-a}{2}$$

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin (a \pm b)}{\cos a \cos b}; \quad \operatorname{ctg} a \pm \operatorname{ctg} b = \frac{\sin (a \pm b)}{\sin a \sin b}$$

$$\sin a + \cos b = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2} \right) =$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2} \right)$$

A.3. Transformări de produse de cosinusuri şi sinusuri în sume de aceleaşi funcţii

$$2 \sin a \cos b = \sin (a+b) + \sin (a-b)$$

$$2 \cos a \cos b = \cos (a+b) + \cos (a-b)$$

$$2 \sin a \sin b = \cos (a-b) - \cos (a+b)$$

A.4. Transformări de pătrate de cosinusuri şi sinusuri în cosinusuri de arce multiple

$$\cos^2 na = \frac{1 + \cos 2na}{2}, \quad \sin^2 na = \frac{1 - \cos 2na}{2}$$

A.5. Formule de transformare a sinusului, cosinusului şi tangentei în funcţie de tangenta arcului pe jumătate

$$\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}, \quad \cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 2

Soluții generale ale unor ecuații trigonometrice particulare mai des întîlnite în diferite exerciții teoretice și aplicative :

Ecuațiile	$\sin x = a$	$\cos x = a$	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
$a =$	$x =$			
$-\sqrt{3}$			$-\frac{\pi}{3} + k\pi$	$-\frac{\pi}{6} + k\pi$
-1	$(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{2} + k\pi$	$(2k+1)\,\pi$	$-\frac{\pi}{4} + k\pi$	$-\frac{\pi}{4} + k\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{3} + k\pi$	$\pm\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi$	$-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$	$-\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{4} + k\pi$	$\pm\frac{\pi}{4} + (2k+1)\,\pi$	$-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi$	$-\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(-1)^{k+1}\cdot\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + k\pi$	$\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} + (2k+1)\,\pi$	$-\frac{\pi}{6} + k\pi$	$-\frac{\pi}{3} + k\pi$

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 2 (continuare)

$-\frac{1}{2}$	$(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi$	$\pm\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi$	$-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi$	$-\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}+k\pi$
0	$k\pi$	$\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$	$k\pi$	$\frac{\pi}{2}+k\pi$
$\frac{1}{2}$	$(-1)^{k}\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi$	$\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$	$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi$	$\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}+k\pi$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(-1)^{k}\cdot\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}+k\pi$	$\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}+2k\pi$	$\frac{\pi}{6}+k\pi$	$\frac{\pi}{3}+k\pi$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-1)^{k}\cdot\frac{\pi}{4}+k\pi$	$\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+k\pi$	$\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+k\pi$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$(-1)^{k}\cdot\frac{\pi}{3}+k\pi$	$\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+k\pi$	$\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+k\pi$
1	$(-1)^{k}\cdot\frac{\pi}{2}+k\pi$	$2k\pi$	$\frac{\pi}{4}+k\pi$	$\frac{\pi}{4}+k\pi$
$\sqrt{3}$			$\frac{\pi}{3}+k\pi$	$\frac{\pi}{6}+k\pi$

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

Coşniţă, C. şi Turtoiu, F. *Culegere de probleme de matematici.* Bucureşti, Editura tehnică, 1966, 1968, 1969.

Ghermănescu, M. *Aplicaţiile trigonometriei.* Bucureşti, Editura tehnică, 1963.

Lespinard, V., Pernet, R. *Trigonométrie.* Lyon, 1962.

Maillard, R., Millet, A. *Trigonométrie.* Paris, 1961.

Novoselov, I. S. *Trigonometrie* (trad. din l. rusă). Bucureşti, Editura tehnică, 1956.

* * * *Gazeta matematică,* seria A. Bucureşti, 1930—1940.

Control ştiinţific: **Gh. D. Simionescu**
Redactor: **Valentina Creţu**
Tehnoredactor: **Elena Geru**
Coperta şi supracoperta: **Alex. Banu**

Bun de tipar: 3.03.1977. Coli de tipar 7,50.
Tiraj: 130 000+75 exemplare legate. C.Z. 514.1

C. 571. — I. P. INFORMAŢIA
str. Brezoianu nr. 23—25
Bucureşti